

## Косые проекторы и относительные формы в морфологии изображений<sup>1</sup>

Ю. П. Пытьев

МГУ им. М. В. Ломоносова, Физический факультет

119991, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова,

дом 1, строение 2, Физический Факультет

yuri.pytyev@gmail.com

Поступила в редакцию 20.06.2013 г.

Рассмотрены новые математические методы морфологического анализа классов изображений и сравнительного анализа их форм как инвариантных относительно условий регистрации изображений носителей информации об изображенных сценах, объектах и т. п., об их геометрических формах. Введены и исследованы понятия абсолютных и относительных форм классов изображений и представляющих их косых проекторов, позволяющие охарактеризовать морфологические зависимости: относительных форм значениями индекса морфологической независимости и абсолютных форм значениями индекса морфологической связности. Рассмотрены новые, основанные на конструкциях относительных форм классов изображений и технике косого проецирования, методы решения задач: сравнительного анализа абсолютных и относительных форм классов изображений, морфологической фильтрации изображений, идентификации изображений, выделения неизвестных объектов на изображениях сцен и др.

Ключевые слова: морфология, морфологический анализ, форма, изображение, сцена, ортогональный проектор, косой проектор.

Математические методы морфологического анализа изображений, рассматриваемые в настоящей статье, разработаны для решения задач содержательного анализа реальных сцен по их изображениям, полученным при неконтролируемых условиях регистрации, таких как условия освещения, его спектральный состав, характеристики регистрирующей аппаратуры, оптические характеристики сцены и др. Одна из типичных задач (задача 1) формулируется так: даны несколько изображений одной и той же местности (сцены), полученных при фиксированном ракурсе, но в разное время суток, года, при неизвестных погодных условиях и, возможно, в различных спектральных диапазонах. Требуется проанализировать изображения на предмет отличий *изображенной местности* (сцены), обусловленных наличием или отсутствием тех или иных априори неизвестных объектов на каждом изображении в сравнении с остальными.

В этой задаче речь идет о выделении относительных *геометрических отличий* элементов каждой изображенной сцены, отличий в *геометрической форме изображенных объектов* и т. п., на фоне значительно больших отличий ее изображений, обусловленных не наличием-отсутствием некоторых объектов, а существенно разными неконтролируемыми условиями получения изображений.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 11-07-00722.

Нередко для решения «задачи 1» требуется предварительно «совместить» все изображения, поскольку условие «фиксированный ракурс» на практике не выполняется.

В более общей постановке необходимость совмещения изображений формулируется как следующая задача (задача 2): на одном изображении априори выделен фрагмент изображенной местности (или некоторый объект) и требуется этот фрагмент (объект) выделить на всех остальных изображениях; в некоторых случаях требуется определить и соответствующие координаты и ракурсы. Задачи 1 и 2 в упрощенной формулировке могут звучать как задачи выделения неизвестного объекта на известной местности (сцене) или известного объекта на неизвестной местности (сцене) соответственно.

Морфологические методы решения таких задач и связанных с ними задач узнавания объектов на изображениях рассмотрены в работах [1–9] и в монографии [10], где дан обзор и сравнительный анализ морфологических методов решения этих и многих других задач анализа и интерпретации данных наблюдений.

Разумеется, для решения подобных задач разрабатывались и другие, в том числе морфологические, эффективные методы, см. [13–19], [22], [24], [28,29] а возрастающий интерес к математическим методам и компьютерным технологиям морфологического анализа изображений, особенно характерный для последнего десятилетия, о чем свидетельствует далеко не полный список фундаментальных работ [20,21], [23], [26,27], с одной стороны, определил ряд новых теоретических и прикладных направлений исследований морфологических методов, а, с другой, — позволил охарактеризовать их единую математическую природу и подытожить результаты исследований в виде хорошо оформленного «курса лекций и практических занятий» [30].

На фоне впечатляющего прогресса в исследованиях морфологических методов в задачах анализа и интерпретации изображений реальных сцен можно выделить несколько недостаточно исследованных направлений, это:

- морфологическое моделирование эффектов неоднородности освещения сцен, искажающих морфологические характеристики их изображений, и морфологическая фильтрация таких искажений;
- морфологические методы сравнительного анализа нескольких форм классов изображений на предмет их морфологической зависимости, морфологической связности и т. п., и
- определение индексов морфологической зависимости и морфологической связности как априорных характеристик качества решения задач морфологической фильтрации, морфологической идентификации, морфологического выделения изображений объектов и др.

В настоящей работе приведены новые результаты, полученные в связи с выделенными направлениями. Речь идет об исследовании относительных морфологических характеристик *классов изображений*

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i(x) \chi_i(x), \quad x \in X, \quad \mathbf{f}_i(\cdot) \in \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (*)$$

нескольких сцен, в которых индикаторные функции  $\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i, \\ 0, & x \notin A_i, \end{cases}$   
 $i = 1, \dots, n$ , множеств  $A_1, \dots, A_n$ , образующих разбиения  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , поля зрения  $X$ , представляют на изображениях (\*) элементы (объекты) сцен, функции  $\mathbf{f}_i(\cdot): X \rightarrow \mathcal{R}^N$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в (\*) моделируют их оптические свойства и характер освещения и представляют на изображениях (\*) «визуальную информацию» об их наличии и расположении на сценах. Соответственно множества  $A_1, \dots, A_n$ , символизирующие элементы сцен, и классы  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$  неизвестных в (\*) функций  $\mathbf{f}_1(\cdot), \dots, \mathbf{f}_n(\cdot)$  определяют морфологические характеристики классов изображений (\*) сцен.

## 1 Элементы морфологического анализа

Как математический объект изображение является векторно-значной функцией  $\mathbf{f}(\cdot): X \rightarrow \mathcal{R}^N$ , где  $\mathcal{R}^N$  —  $N$ -мерное евклидово пространство,  $X$  — ограниченная замкнутая область на плоскости  $\mathcal{R}^2$ , или — ее дискретное представление подмножеством  $\{1, 2, \dots\}^2$ . Область  $X$  называется полем зрения, значение нормы  $\|\mathbf{f}(x)\|_N$  называется яркостью изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$  в точке  $x \in X$ , где  $\|\mathbf{z}\|_N^2 = z_1^2 + \dots + z_N^2$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in \mathcal{R}^N$ , а  $\mathbf{f}(x)/\|\mathbf{f}(x)\|_N$  называется цветом  $\mathbf{f}(\cdot)$  в этой точке; норма порождается скалярным произведением  $(\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2)_N = z_1^1 z_1^2 + \dots + z_N^1 z_N^2$ .

Линейные операции над изображениями  $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)(\cdot)$  и  $(a \cdot \mathbf{f})(\cdot)$ ,  $a \in \mathcal{R}^1$ , определены равенствами  $(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2)(x) = \mathbf{f}_1(x) + \mathbf{f}_2(x)$ ,  $(a \cdot \mathbf{f})(x) = a \cdot \mathbf{f}(x)$ ,  $x \in X$ .

Наконец, на борелевском классе множеств  $\mathcal{R}^2$  определена некоторая мера  $\mu$ ,  $X$  и любое изображение  $\mathbf{f}(\cdot)$  —  $\mu$ -измеримы, функция  $\|\mathbf{f}(\cdot)\|_N^2$   $\mu$ -интегрируема. Множество изображений, обозначим его  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , — евклидово пространство, в котором  $\|\mathbf{f}\|^2 = \int_X \|\mathbf{f}(x)\|_N^2 \mu(dx) < \infty$  и  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_X (\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x))_N \mu(dx)$

суть квадрат нормы изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$  и скалярное произведение изображений  $\mathbf{f}(\cdot)$  и  $\mathbf{g}(\cdot)$  соответственно, причем  $\|\mathbf{f}(\cdot)\|_N \in \mathcal{L}_\mu^2(X)$ .

### 1.1 Форма изображения и класса изображений сцены

Пусть  $\mathcal{S}$  обозначает некоторую сцену,  $\mathcal{K}$  — множество условий регистрации ее изображений, таких как погодные условия, характеристики освещения и отражательной способности элементов  $\mathcal{S}$  и т. п.,

$$\mathcal{V}_\mathcal{S} = \{\mathbf{f}(\cdot, k) \in \mathcal{L}_\mu^2(X), k \in \mathcal{K}\} \quad (1)$$

— класс изображений  $\mathcal{S}$ , которые могут быть получены при всех условиях  $k \in \mathcal{K}$  их регистрации.

Класс  $\mathcal{V}_S$  содержит все данные о геометрических характеристиках сцены  $\mathcal{S}$ , о формах её элементов, которые *представлены* её изображениями  $\mathbf{f}(\cdot, k)$ ,  $k \in \mathcal{K}$ .

Выберем некоторое изображение  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$  и образуем класс  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$

$$\mathcal{V}_S(\mathbf{f}) = \{\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S, \mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)\} \quad (2)$$

изображений  $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$ , *представляющих* геометрические характеристики элементов  $\mathcal{S}$  *не более детально*, чем  $\mathbf{f}(\cdot)$ . Класс  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  полностью характеризует *относительное качество изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$  представлять* (визуально передавать) геометрические характеристики  $\mathcal{S}$  по сравнению с изображениями  $\mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ ,  $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$ . Назовем  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  *S-формой изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$* , или — просто *формой  $\mathbf{f}(\cdot)$* , если из контекста понятно, *форма* какой конкретно сцены, далее называемая *формой сцены*, *представлена* изображением  $\mathbf{f}(\cdot)$ , соответственно класс  $\mathcal{V}_S$  назовем *формой изображений* сцены  $\mathcal{S}$ .

В равенстве (2) *отношение « $\preceq$ »* означает, что изображение  $\mathbf{g}(\cdot)$  *сравнимо «по форме»* с  $\mathbf{f}(\cdot)$ , но *«проще, не сложнее по форме»*, чем  $\mathbf{f}(\cdot)$ , и, возможно, не передает<sup>2</sup> всех деталей формы  $\mathcal{S}$ , представленных на изображении  $\mathbf{f}(\cdot)$ . Условимся говорить, что изображение  $\mathbf{f}(\cdot)$  и любое  $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  *сравнимы по форме*, причем *форма любого изображения  $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  не сложнее*,  $\mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ , *чем форма  $\mathbf{f}(\cdot)$* .

Так определенное отношение  $\preceq$  задает на  $\mathcal{V}_S$  частичную квазиупорядоченность, а именно, отношение  $\preceq$  рефлексивно:  $\mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{g}(\cdot)$ ,  $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$ , и транзитивно: если  $\mathbf{h}(\cdot) \preceq \mathbf{g}(\cdot)$  и  $\mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ , то  $\mathbf{h}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ , но, во-первых, если  $\mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$  и  $\mathbf{f}(\cdot) \preceq \mathbf{g}(\cdot)$ , то, вообще говоря,  $\mathbf{f}(\cdot) \not\equiv \mathbf{g}(\cdot)$ , а, во-вторых, произвольная пара изображений  $\mathbf{f}(\cdot), \mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$  может и не быть сравнимой по форме, т. е. может не удовлетворять ни одному из условий  $\mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$  или  $\mathbf{f}(\cdot) \preceq \mathbf{g}(\cdot)$ , характеризующих «относительную детальность» данных о форме  $\mathcal{S}$ , представленных  $\mathbf{f}(\cdot)$  и  $\mathbf{g}(\cdot)$ ; в равной степени сказанное относится и к произвольной паре изображений  $\mathbf{g}_1(\cdot), \mathbf{g}_2(\cdot)$  из  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ .

С другой стороны, если  $\mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$  и  $\mathbf{f}(\cdot) \preceq \mathbf{g}(\cdot)$ , то изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$  и  $\mathbf{g}(\cdot)$  *эквивалентны по форме*, одинаково детально представляют форму сцены  $\mathcal{S}$ ,  $\mathbf{f}(\cdot) \sim \mathbf{g}(\cdot)$ , причем если  $\mathbf{f}(\cdot) \sim \mathbf{g}(\cdot)$ , то  $\mathbf{g}(\cdot) \sim \mathbf{f}(\cdot)$ , а если сверх того  $\mathbf{g}(\cdot) \sim \mathbf{h}(\cdot)$ , то  $\mathbf{f}(\cdot) \sim \mathbf{h}(\cdot)$ , т. е. отношение  $\sim$  есть *отношение эквивалентности*. Поэтому с каждым изображением  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$  связан класс  $\mathcal{E}_S(\mathbf{f})$  *эквивалентных по форме ему и эквивалентных по форме между собой изображений*, одинаково детально представляющих форму сцены  $\mathcal{S}$ ,

$$\mathcal{E}_S(\mathbf{f}) = \{\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S, \mathbf{g}(\cdot) \sim \mathbf{f}(\cdot)\}, \mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S. \quad (3)$$

Частичная квазиупорядоченность « $\preceq$ », определенная на  $\mathcal{V}_S$ , порождает частичную упорядоченность  $\leq$  на множестве  $\mathcal{E}_S$  классов  $\mathcal{E}_S(\mathbf{f})$ ,  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$ , эквивалентных по форме изображений, согласно которой для любых

<sup>2</sup>Например, если  $\mathbf{g}(x) = F(\mathbf{f}(x)) \stackrel{\text{def}}{=} F \circ \mathbf{f}(x)$ ,  $x \in X$ , где  $F(\cdot): \mathcal{R}^N \rightarrow \mathcal{R}^N$ ,  $\|F \circ \mathbf{f}\| < \infty$ , то, возможно,  $\mathbf{g}(x_1) = \mathbf{g}(x_2)$ , хотя  $\mathbf{f}(x_1) \neq \mathbf{f}(x_2)$ , и в этом смысле  $\mathbf{g}(\cdot)$ , возможно, не передает некоторые детали формы  $\mathcal{S}$ , представленные  $\mathbf{f}(\cdot)$ , т. е.  $\mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ .

$\mathbf{f}_1(\cdot) \in \mathcal{E}_1$  и  $\mathbf{f}_2(\cdot) \in \mathcal{E}_2$   $\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_2$ , если  $\mathbf{f}_1(\cdot) \preceq \mathbf{f}_2(\cdot)$ . На множестве классов  $\mathcal{E}_S$  отношение  $\leq$  транзитивно, рефлексивно, а отношения  $\mathcal{E}_1 \leq \mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_2 \leq \mathcal{E}_1$  эквивалентны тождественности  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ :  $\mathcal{E}_1 \equiv \mathcal{E}_2$ .

Как правило, для каждой сцены  $\mathcal{S}$  можно указать *минимальный по включению класс*  $\mathbf{J}_S \subset \mathcal{V}_S$  самых детальных, попарно несравнимых по форме её изображений  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$ , таких, что  $\mathcal{E}_S(\mathbf{f}^{(1)}) \cap \mathcal{E}_S(\mathbf{f}^{(2)}) = \emptyset$ , если  $\mu(\{x \in X, \mathbf{f}^{(1)}(x) \neq \mathbf{f}^{(2)}(x)\}) > 0$ ,  $\mathbf{f}^{(i)} \in \mathbf{J}_S$ ,  $i = 1, 2$ , и  $\mathcal{V}_S = \bigcup_{\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbf{J}_S} \mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ , при

этом  $\forall \mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S \exists \mathbf{f}(\cdot) \in \mathbf{J}_S \mathbf{g}(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ . Класс  $\mathbf{J}_S$  условимся называть *определяющим форму*  $\mathcal{V}_S$  изображений сцены  $\mathcal{S}$ , или —  $\mathcal{S}$ -формоопределяющим. Поэтому класс  $\mathcal{V}_S$  (форма изображений сцены  $\mathcal{S}$ ) является и *формой класса изображений*  $\mathbf{J}_S \subset \mathcal{V}_S$ .

Любые два изображения  $\mathbf{g}_1(\cdot), \mathbf{g}_2(\cdot) \in \mathcal{V}_S$  считаются эквивалентными по форме, если для некоторого  $\alpha > 0$   $\mathbf{g}_1(\cdot) = \alpha \mathbf{g}_2(\cdot)$ . В этом случае для любого  $\alpha > 0$   $\mathcal{E}_S(\mathbf{f}) = \mathcal{E}_S(\alpha \mathbf{f})$  и  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f}) = \mathcal{V}_S(\alpha \mathbf{f})$ , т.е.  $\mathcal{E}_S(\mathbf{f})$  и  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  суть конусы в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ . Более того, обычно если  $\mathbf{g}_1(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$  и  $\mathbf{g}_2(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ , то для любых  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$  не только  $\alpha_1 \mathbf{g}_1(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$  и  $\alpha_2 \mathbf{g}_2(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ , но и  $(\alpha_1 \mathbf{g}_1 + \alpha_2 \mathbf{g}_2)(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ . Последнее условие означает, что для любого  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$   $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  — выпуклый конус в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ . Наконец, обычно для любого  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$  выпуклый конус  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  является замкнутым множеством в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , т.е. таким, что для любой сходящейся в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$  последовательности  $\mathbf{f}_i(\cdot) \in \mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , её предел  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{f}_i(\cdot) \in \mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  [10].

При таких условиях существует<sup>3</sup> оператор  $\mathbf{P}_f: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}_\mu^2(X)$ , определенный условием

$$\|\mathbf{g}(\cdot) - \mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot)\| = \inf_{\mathbf{h}(\cdot) \in \mathcal{V}_S(\mathbf{f})} \|\mathbf{g}(\cdot) - \mathbf{h}(\cdot)\|, \quad \mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^2(X), \quad (4)$$

называемый *оператором проецирования* на  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ . Для любого изображения  $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^2(X)$  изображение  $\mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot)$  является ближайшим в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$  к  $\mathbf{g}(\cdot)$  среди всех изображений, принадлежащих  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ , т.е. среди всех изображений, форма которых не сложнее, чем форма  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$ .

Поскольку при перечисленных условиях оператор  $\mathbf{P}_f$  определяет  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ ,  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f}) = \{\mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^2(X), \mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot) = \mathbf{g}(\cdot)\}$ , оператор  $\mathbf{P}_f$  называется *формой изображения*  $\mathbf{f}(\cdot)$  или, точнее, — (операторным) *представлением формы*  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  изображения  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{V}_S$ .

Пусть  $\mathcal{L}_f(X)$  — минимальное (по включению) подпространство  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , содержащее конус  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ . Если оператор  $\mathbf{P}_f: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}_\mu^2(X)$  ортогонально проецирует на  $\mathcal{L}_f(X)$ ,  $\widehat{\mathbf{P}}_f: \mathcal{L}_f(X) \rightarrow \mathcal{L}_f(X)$  проецирует на  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$  и  $\mathbf{P}_f: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}_\mu^2(X)$  проецирует на  $\mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ , то  $\mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot) = \widehat{\mathbf{P}}_f \mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot)$ , хотя сумма расстояний от  $\mathbf{g}(\cdot)$  до  $\widehat{\mathbf{P}}_f \mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot)$  и от  $\widehat{\mathbf{P}}_f \mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot)$  до  $\mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot)$  больше, чем расстояние от  $\mathbf{g}(\cdot)$  до  $\mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot)$  (лемма о транзитивности проецирования).

*Подпространство*  $\mathcal{L}_f(X)$  *и представляющий его ортогональный проектор*  $\mathbf{P}_f$  *называются формой* в широком смысле изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$ . В случае

<sup>3</sup>При таких условиях точная нижняя грань справа в (4) достигается, причем на единственном изображении  $\mathbf{P}_f \mathbf{g}(\cdot) \in \mathcal{V}_S(\mathbf{f})$ .

формы в широком смысле отношения « $\sim$ » и « $\preceq$ » удовлетворяют условиям: для любого  $\alpha \neq 0$   $\alpha \mathbf{f}(\cdot) \sim \mathbf{f}(\cdot)$  и для любых  $\alpha_1, \alpha_2$   $\alpha_1 \mathbf{g}_1(\cdot) + \alpha_2 \mathbf{g}_2(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ , если  $\mathbf{g}_1(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$  и  $\mathbf{g}_2(\cdot) \preceq \mathbf{f}(\cdot)$ .

## 2 Относительные формы классов изображений

В этом параграфе рассмотрены морфологические методы сравнительного анализа форм, основанного на конструкции относительной формы.

### 2.1 Косое проецирование

Пусть  $\mathcal{L}_\mu^2(X) = \mathcal{L}_{1,\mu}^2(X) \oplus \mathcal{L}_{2,\mu}^2(X)$  — разложение  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$  в прямую, вообще говоря, не ортогональную сумму подпространств  $\mathcal{L}_{1,\mu}^2(X)$  и  $\mathcal{L}_{2,\mu}^2(X)$ , и соответственно для любого изображения  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^2(X)$

$$\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}_1(\cdot) + \mathbf{f}_2(\cdot) \quad (5)$$

— однозначное его представление в виде суммы изображений  $\mathbf{f}_1(\cdot) \in \mathcal{L}_{1,\mu}^2(X)$  и  $\mathbf{f}_2(\cdot) \in \mathcal{L}_{2,\mu}^2(X)$ . Определенный для любого<sup>4</sup>  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^2(X)$  оператор  $S: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}_\mu^2(X)$  равенством  $S\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}_1(\cdot)$  называется *косым проектором*, проецирующим на  $\mathcal{L}_{1,\mu}^2(X)$  параллельно (вдоль)  $\mathcal{L}_{2,\mu}^2(X)$ . Так определенный косой проектор является линейным ограниченным оператором, удовлетворяющим условию  $S^2 = S$ . При этом  $S: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}_\mu^2(X)$  — косой проектор, если и только если он ограничен и удовлетворяет условию  $S^2 = S$ , причем если  $S$  проецирует на  $\mathcal{L}_{1,\mu}^2(X)$  вдоль  $\mathcal{L}_{2,\mu}^2(X)$ , то  $I - S$  проецирует на  $\mathcal{L}_{2,\mu}^2(X)$  вдоль  $\mathcal{L}_{1,\mu}^2(X)$ , где  $I: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}_\mu^2(X)$  — единичный оператор. В конечномерном евклидовом пространстве, например, в  $\mathcal{R}^N$ , для любого его подпространства  $\mathcal{R}^k$ ,  $k < N$ , существует сколько угодно *дополнительных* к  $\mathcal{R}^k$  подпространств  $\mathcal{R}^{N-k}$ , т. е. таких, что  $\mathcal{R}^N = \mathcal{R}^k \oplus \mathcal{R}^{N-k}$ , и представляющих их *или* косых проекторов, проецирующих на  $\mathcal{R}^k$  вдоль  $\mathcal{R}^{N-k}$ , см. рис. 2.1.

**Замечание 2.1.** Если на рис. 2.1  $\mathcal{R}^1$  — форма сигнала  $\mathbf{f}^{(1)}$ ,  $\mathcal{R}^2$  — форма помехи  $\mathbf{f}^{(2)}$ ,  $\Pi_{\mathcal{R}^i}$  ортогонально проецирует на  $\mathcal{R}^i$ ,  $i = 1, 2$ , и  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$  — наблюдаемый сигнал, то  $S^{(1)}\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)}$ ,  $S^{(2)}\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(2)}$ , в то время как ортогональные проекции  $\Pi_{\mathcal{R}^1}\mathbf{f} = \Pi_{\mathcal{R}^1}\mathbf{f}^{(1)} + \Pi_{\mathcal{R}^1}\mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}^{(1)} + \Pi_{\mathcal{R}^1}\mathbf{f}^{(2)}$  и  $\Pi_{\mathcal{R}^2}\mathbf{f} = \Pi_{\mathcal{R}^2}\mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$ , характерные для морфологического анализа [10], суть наиболее точные приближения  $\mathbf{f}$  сигналами  $\mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{R}^1$  и помехами  $\mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{R}^2$ .

Косое проецирование можно получить и как решение задачи *оптимального оценивания* сигнала  $\mathbf{f}^{(1)}$  в теоретико-возможностной модели [25]

<sup>4</sup>В отличие от ортогонального проектора косой проектор — не самосопряженный оператор,  $S^* \neq S$ , а если прямая (не ортогональная) сумма подпространств  $\mathcal{L}_{1,\mu}^2(X) \oplus \mathcal{L}_{2,\mu}^2(x)$  плотна в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , но не совпадает с ним, то определенный на  $\mathcal{L}_{1,\mu}^2(X) \oplus \mathcal{L}_{2,\mu}^2(X)$  равенством  $S\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}_1(\cdot)$  оператор удовлетворяет условию  $S^2 = S$ , но неограничен на  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$  [11].

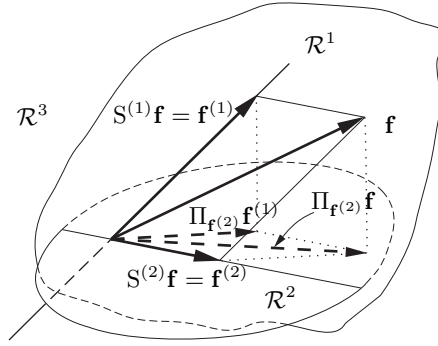


Рис. 2.1: Косые проекторы  $S^{(i)}: \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ ,  $S^{(1)}$  проецирует на  $\mathcal{R}^1$  вдоль  $\mathcal{R}^2$ ,  $S^{(2)} = I - S^{(1)}$  проецирует на  $\mathcal{R}^2$  вдоль  $\mathcal{R}^1$ ,  $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^1 \oplus \mathcal{R}^2$ .

наблюдения, в которой сигнал  $\mathbf{f}^{(1)}$  и помеха  $\mathbf{f}^{(2)}$  суть *реализации* независимых нечетких векторов  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$ , заданных распределениями

$$g^{\varphi^{(i)}}(\mathbf{f}^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{f}^{(i)} \in \mathcal{R}^i, \\ 0, & \mathbf{f}^{(i)} \notin \mathcal{R}^i, \end{cases} \quad \mathbf{f}^{(i)} \in \mathcal{R}^3 = \mathcal{R}^1 \oplus \mathcal{R}^2, \quad i = 1, 2,$$

возможностей их значений<sup>5</sup>, наблюдаемых по схеме  $\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$ . Действительно, в силу независимости  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  их совместное распределение  $g^{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}}(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}) = \min\{g^{\varphi^{(1)}}(\mathbf{f}^{(1)}), g^{\varphi^{(2)}}(\mathbf{f}^{(2)})\}$ ,  $\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{R}^3$ , поэтому  $g^{\varphi^{(1)}, \varphi}(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}) = \min\{g^{\varphi^{(1)}}(\mathbf{f}^{(1)}), g^{\varphi^{(2)}}(\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(1)})\}$  — возможность равенств  $\varphi^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}$ ,  $\varphi = \mathbf{f}$ , и оптимальная оценка  $\mathbf{f}_*^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{f})$ , минимизирующая *возможность ошибки* оценивания значения  $\varphi^{(1)} = \mathbf{f}^{(1)}$ , определяется условием  $g^{\varphi^{(1)}, \varphi}(\mathbf{f}_*^{(1)}, \mathbf{f}) = \max\{g^{\varphi^{(1)}, \varphi}(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}) \mid \mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{R}^1\}$ , согласно которому  $\mathbf{f}_*^{(1)} \in \mathcal{R}^1 \cap (\mathcal{R}^2 + \mathbf{f}) = \{S^{(1)}\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}^{(1)}\}$ , см. рис. 2.1, т. е.  $\mathbf{f}_*^{(1)} = S^{(1)}\mathbf{f}$ .

Разумеется, если  $\mathcal{L}_\mu^2(X) = \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{L}_{j,\mu}^2(X)$  — разложение  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$  в прямую сумму подпространств  $\mathcal{L}_{1,\mu}^2(X), \dots, \mathcal{L}_{m,\mu}^2(X)$ , и  $\mathbf{f}(\cdot) = \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_j(\cdot)$  — соответствующее разложение изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$ , то определенный равенством  $S_{j_1}\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}_{j_1}(\cdot)$  оператор  $S_{j_1}: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}_\mu^2(X)$  называется косым проектором, проецирующим в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$  на  $\mathcal{L}_{j_1,\mu}^2(X)$  вдоль  $\bigoplus_{j=1, j \neq j_1}^m \mathcal{L}_{j,\mu}^2(X)$ , косой проектор  $S_{j_1, \dots, j_k}$ , определенный равенством  $S_{j_1, \dots, j_k}\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}_{j_1}(\cdot) + \dots + \mathbf{f}_{j_k}(\cdot)$ , проецирует на  $\bigoplus_{j \in J'} \mathcal{L}_{j,\mu}^2(X)$  вдоль  $\bigoplus_{j \in J \setminus J'} \mathcal{L}_{j,\mu}^2(X)$ , где  $J = \{1, \dots, m\}$ ,  $J' = \{j_1, \dots, j_k\} \in J$  и  $j_1, \dots, j_k$  попарно различны. При этом равенствам  $\mathcal{L}_\mu^2(X) = (\bigoplus_{j \in J'} \mathcal{L}_{j,\mu}^2(X)) \oplus (\bigoplus_{j \in J \setminus J'} \mathcal{L}_{j,\mu}^2(X)) = \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{L}_{j,\mu}^2(X)$  соответствуют равенства  $I = \sum_{j \in J'} S_j + \sum_{j \in J \setminus J'} S_j = \sum_{j=1}^m S_j$ .

<sup>5</sup>Значение  $g^{\varphi^{(i)}}(\mathbf{f}^{(i)})$  — возможность равенства  $\varphi^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Заметим, что для любых  $i, j = 1, \dots, m$ ,  $i \neq j$ ,  $S_i S_j = S_j S_i = 0$ . Действительно, для любого  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^2(X)$   $S_i \mathbf{f}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_i(\cdot) \in \mathcal{L}_{i,\mu}(X)$  и  $S_j \mathbf{f}_i(\cdot) = \mathbf{0}(\cdot)$ , поскольку  $S_j$  проецирует  $\mathbf{f}_i(\cdot)$  на  $\mathcal{L}_{j,\mu}(X)$  параллельно подпространству  $\bigoplus_{k=1, k \neq j}^m \mathcal{L}_{k,\mu}^2$ , содержащему  $\mathbf{f}_i(\cdot)$  (вместе с  $\mathcal{L}_{\mu,i}^2(X)$ , содержащим  $\mathbf{f}_i(\cdot)$ ).

## 2.2 Относительные формы как косые проекторы

Определим класс изображений сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$  равенством

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^{(1)}(x) \chi_i(x), \quad x \in X, \quad \mathbf{f}_i^{(1)}(\cdot) \in \mathbf{F}_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

в котором:  $\chi_1(\cdot), \dots, \chi_n(\cdot)$  суть, представляющие элементы сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$  на изображении (6), индикаторные функции  $\mu$ -измеримых подмножеств  $A_1, \dots, A_n$  поля зрения  $X$ , символизирующих элементы  $\mathcal{S}^{(1)}$  и образующих *разбиение*  $X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ; неизвестная функция  $\mathbf{f}_i^{(1)}(\cdot) \in \mathbf{F}_i^{(1)}$  моделирует *возможные оптические свойства и характер освещения*  $i$ -го элемента  $\mathcal{S}^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , множества

$$\mathbf{F}_i^{(1)} = \{(\mathbf{a}_i^{(0)} + \mathbf{a}_i^{(1)} x_1 + \mathbf{a}_i^{(2)} x_2) \chi_i(x), \quad x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2) \in X, \quad \mathbf{a}^{(t)} \in \mathcal{R}^N, \quad t = 0, 1, 2, \quad \mu(A_i) > 0\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

суть известные взаимно ортогональные подпространства  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ . Обозначим  $\mathcal{L}^{(1)} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{(1)}$  минимальное подпространство  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , содержащее все изображения (6) сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$  (в данном случае  $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(1)}}$  — форма изображений  $\mathcal{S}^{(1)}$ ),  $\Pi^{(1)}: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}^{(1)}$  обозначим ортогональный проектор<sup>6</sup>, проецирующий на  $\mathcal{L}^{(1)}$  и представляющий форму класса  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(1)}}$  наиболее детальных, определяющих форму  $\mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(1)}}$  изображений сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$ .

Класс изображений той же сцены, на которой появился некоторый объект, изменились оптические свойства элементов сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$  и условия их освещения, определим равенством

$$\mathbf{f}^{(2)}(x) = (1 - \chi_0(x)) \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^{(2)}(x) \chi_i(x) + \mathbf{f}_0^{(2)}(x) \chi_0(x), \quad x \in X, \quad \mathbf{f}_i^{(2)}(\cdot) \in \mathbf{F}_i^{(2)}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (8)$$

в котором  $\chi_0(\cdot)$  — индикаторная функция множества  $A_0 \subset X$ , *символизирующего появившийся объект*, представляет его на изображении (8), функция  $\mathbf{f}_0^{(2)}(\cdot)$ , определенная на  $A_0$ , моделирует его оптические свойства и условия освещения, неизвестные функции  $\mathbf{f}_i^{(2)}(\cdot) \in \mathbf{F}_i^{(2)} = \mathbf{F}_i^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , неиз-

<sup>6</sup>Запись  $\Pi^{(1)}: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}^{(1)}$  здесь и далее означает, что  $\mathcal{L}^{(1)}$  есть пространство значений оператора  $\Pi^{(1)}: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}_\mu^2(X)$ .



вестная функция

$$\mathbf{f}_0^{(2)}(\cdot) \in \mathbf{F}_0^{(2)} = \{(\mathbf{a}_0^{(0)} + \mathbf{a}_0^{(1)}x_1 + \mathbf{a}_0^{(2)}x_2)\chi_0(x), x = (x_1, x_2) \in X, \mathbf{a}_0^{(t)} \in \mathcal{R}^N, \\ t = 0, 1, 2, \mu(A_0) > 0\}. \quad (9)$$

Измененную таким образом сцену  $\mathcal{S}^{(1)}$  обозначим  $\mathcal{S}^{(2)}$ , минимальное подпространство  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , содержащее все изображения (8), обозначим  $\mathcal{L}^{(2)} (= \mathcal{V}_{\mathcal{S}^{(2)}})$ ,  $\Pi^{(2)}: \mathcal{L}_\mu^2(X) \rightarrow \mathcal{L}^{(2)}$  обозначим ортогональный проектор, проецирующий на  $\mathcal{L}^{(2)}$  и представляющий форму класса  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(2)}}$  и изображений сцены  $\mathcal{S}^{(2)}$ .

Обозначим:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}$  минимальное подпространство<sup>7</sup>  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , содержащее  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ . Поскольку при исследовании взаимных связей и зависимостей форм  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$  ортогональное дополнение  $\mathcal{L}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{f} \in \mathcal{L}_\mu^2(X), (\mathbf{g}, \mathbf{f}) = 0, \mathbf{g} \in \mathcal{L}\} \equiv \mathcal{L}_\mu^2(X) \ominus \mathcal{L}$  можно исключить, далее *все проекторы со значениями в  $\mathcal{L}$  будем рассматривать как операторы из  $\mathcal{L}$  в  $\mathcal{L}$* , а  $\mathcal{L}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)}$  выделим как подпространство  $\mathcal{L}$ , характеризующее *связность* форм  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ .

Пусть

- $\mathbf{e}_1^{(0)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_k^{(0)}(\cdot)$  — некоторый ортонормированный базис  $\mathcal{L}^{(0)}$ ,
  - $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_k^{(1)}(\cdot), \mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot)$  — ортонормированный базис  $\mathcal{L}^{(1)}$ ,
  - $\mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_k^{(2)}(\cdot), \mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)$  — ортонормированный базис  $\mathcal{L}^{(2)}$ ,
- и, следовательно, для любого  $\mathbf{f} \in \mathcal{L}$  равенства

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}\mathbf{f}(\cdot) &= \sum_{i=1}^k (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i^{(0)})\mathbf{e}_i^{(0)}(\cdot) + \sum_{j=1}^l (\mathbf{f}, \mathbf{e}_j^{(1)})\mathbf{e}_j^{(1)}(\cdot), \\ \Pi^{(2)}\mathbf{f}(\cdot) &= \sum_{i=1}^k (\mathbf{f}, \mathbf{e}_i^{(0)})\mathbf{e}_i^{(0)}(\cdot) + \sum_{j=1}^m (\mathbf{f}, \mathbf{e}_j^{(2)})\mathbf{e}_j^{(2)}(\cdot), \end{aligned} \quad (10)$$

определяют ортогональные проекторы  $\Pi^{(1)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{(1)}$  и  $\Pi^{(2)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{(2)}$ .

Обозначим

- $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  линейную оболочку  $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot)$ ,
- $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  линейную оболочку  $\mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)$ .

Поскольку  $\mathcal{L} = (\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \oplus \mathcal{L}^{(0)} \oplus (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$  — прямая сумма трех подпространств  $\mathcal{L}$ , то для любого изображения  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\cdot) &= \underbrace{f_1^{(0)}\mathbf{e}_1^{(0)}(\cdot) + \dots + f_k^{(0)}\mathbf{e}_k^{(0)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}^{(0)}} + \underbrace{f_1^{(1)}\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot) + \dots + f_l^{(1)}\mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}} + \\ &\quad + \underbrace{f_1^{(2)}\mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot) + \dots + f_m^{(2)}\mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}} \quad (11) \end{aligned}$$

— единственное его разложение, и согласно равенству (11) искомые косые проекторы суть соответственно:

<sup>7</sup>Точнее следовало бы писать  $\mathcal{L} = \text{Cl}(\mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)})$ , где Cl — символ замыкания в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , но далее  $\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)}, \dots$  — конечномерные подпространства  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$  и их конечные суммы — подпространства (замкнутые линейные многообразия)  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ .

- $S^{(0)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{(0)}$ , проецирующий на  $\mathcal{L}^{(0)}$  вдоль  $(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \oplus (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$

$$S^{(0)}\mathbf{f}(\cdot) = f_1^{(0)}\mathbf{e}_1^{(0)}(\cdot) + \dots + f_k^{(0)}\mathbf{e}_k^{(0)}(\cdot), \quad (12)$$

- $S^{(1,0)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , проецирующий на  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  вдоль  $\mathcal{L}^{(0)} \oplus (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) = \mathcal{L}^{(2)}$

$$S^{(1,0)}\mathbf{f}(\cdot) = f_1^{(1)}\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot) + \dots + f_l^{(1)}\mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot), \quad (13)$$

- $S^{(2,0)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , проецирующий на  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  вдоль  $(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \oplus \mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(1)}$

$$S^{(2,0)}\mathbf{f}(\cdot) = f_1^{(2)}\mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot) + \dots + f_m^{(2)}\mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot). \quad (14)$$

где  $S^{(0)} = \Pi^{(0)}$  — ортогонально проецирует на  $\mathcal{L}^{(0)}$  (вдоль  $(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \oplus (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$ ), ибо  $\mathcal{L}^{(0)} \perp ((\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \oplus (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}))$ . Поэтому

- $\mathcal{L}^{(0)}$  и представляющий  $\mathcal{L}^{(0)}$  косой проектор  $S^{(0)}$  определяют *относительную форму* формоопределяющего класса  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)}}$  изображений элементов, принадлежащих сценам  $\mathcal{S}^{(1)}$  и  $\mathcal{S}^{(2)}$ , которые будем интерпретировать как *изображения виртуальной сцены*  $\mathcal{S}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)}$ ;

- $\mathcal{L}_0^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и представляющий  $\mathcal{L}_0^{(1)}$  косой проектор  $S^{(1,0)}$  определяют *относительную форму* формоопределяющего класса  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(1)} \setminus \mathcal{S}^{(2)}}$  изображений виртуальной сцены  $\mathcal{S}^{(1)} \setminus \mathcal{S}^{(2)}$  как изображений элементов, которые есть на сцене  $\mathcal{S}^{(1)}$  и отсутствуют на сцене  $\mathcal{S}^{(2)}$ ,

- $\mathcal{L}_0^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и представляющий  $\mathcal{L}_0^{(2)}$  косой проектор  $S^{(2,0)}$  определяют *относительную форму* формоопределяющего класса  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(2)} \setminus \mathcal{S}^{(1)}}$  изображений виртуальной сцены  $\mathcal{S}^{(2)} \setminus \mathcal{S}^{(1)}$  как изображений элементов, которые есть на  $\mathcal{S}^{(2)}$  и отсутствуют на  $\mathcal{S}^{(1)}$ . Иными словами,  $S^{(2,0)}$  представляет форму класса изображений *появившегося на  $\mathcal{S}^{(2)}$  объекта и искаженных его появлением элементов  $\mathcal{S}^{(1)}$* , см. рис. 2.3.

Ортогональные проекторы  $\Pi^{(1)}$  и  $\Pi^{(2)}$  в (10) представляют формы изображений сцен  $\mathcal{S}^{(1)}$  и  $\mathcal{S}^{(2)}$  «безотносительно» друг к другу в том смысле, что для определения  $\Pi^{(1)}$  достаточно знать  $\mathcal{L}^{(1)}$  и неважно, определен  $\Pi^{(2)}$  или нет, поэтому в контексте сравнительного анализа формы  $\mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}^{(2)}$  и представляющие их ортогональные проекторы  $\Pi^{(1)}$ ,  $\Pi^{(2)}$  естественно назвать *абсолютными формами*.

Разложению  $\mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}_{(0)}^{(1)} \oplus \mathcal{L}^{(0)} \oplus \mathcal{L}_{(0)}^{(2)}$  суммы абсолютных форм  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$  в прямую сумму *относительных форм*  $\mathcal{L}_{(0)}^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}_{(0)}^{(2)}$  отвечает разложение  $\mathbf{I} = S^{(1,0)} + S^{(0)} + S^{(2,0)}$  единичного оператора  $\mathbf{I}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ .

**Замечание 2.2.** Слагаемые  $\mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{L}^{(2)}$  в разложении  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$  наблюдаемого сигнала  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^3$ , см. рис. 2.2, определяются с точностью<sup>8</sup> до произвольного  $\mathbf{f}^{(0)} \in \mathcal{L}^{(0)}$ , а именно,  $\mathbf{f}^{(1)} = S^{(1,0)}\mathbf{f} + \alpha S^{(0)}\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}^{(2)} = S^{(2,0)}\mathbf{f} + \beta S^{(0)}\mathbf{f}$ ,  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\mathbf{f}^{(0)} = (\alpha - \beta)S^{(0)}\mathbf{f}$ . Оптимальность разложений  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$  показана в замечании 5.1.

<sup>8</sup>Если  $\mathcal{L}^{(0)} = \{\mathbf{0}\}$ , то слагаемые  $\mathbf{f}^{(1)}$  и  $\mathbf{f}^{(2)}$  определяются однозначно:  $\mathbf{f}^{(1)} = S^{(1,0)}\mathbf{f} = S^{(1)}\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}^{(2)} = S^{(2,0)}\mathbf{f} = S^{(2)}\mathbf{f}$ , см. рис. 2.1.

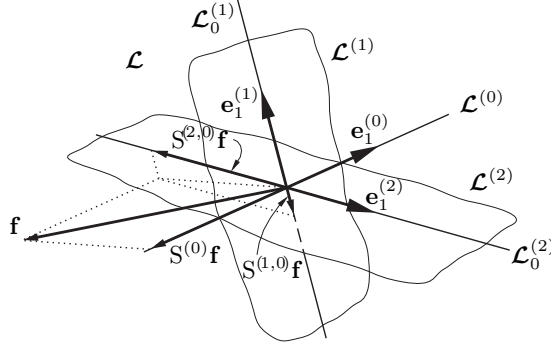


Рис. 2.2: Абсолютные формы  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ ,  $\mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L} = \mathcal{R}^3$ , относительные формы  $\mathcal{L}^{(0)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(2)}$ , их базисные векторы  $\mathbf{e}_1^{(0)}$ ,  $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot)$ ,  $\mathbf{e}_1^{(2)}$  и разложение  $\mathbf{f} = S^{(1,0)}\mathbf{f} + S^{(0)}\mathbf{f} + S^{(2,0)}\mathbf{f} \in \mathcal{L}$ , где  $S^{(1,0)}\mathbf{f} + S^{(0)}\mathbf{f} \in \mathcal{L}^{(1)}$ ,  $S^{(2,0)}\mathbf{f} + S^{(0)}\mathbf{f} \in \mathcal{L}^{(2)}$ .

### 3 Анализ зависимости относительных форм и связности абсолютных форм

Для определения  $f_\alpha^{(0)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ ,  $f_\beta^{(1)}$ ,  $\beta = 1, \dots, l$ , и  $f_\gamma^{(2)}$ ,  $\gamma = 1, \dots, m$ , в (12), (13) и (14) заметим, что  $f_\alpha^{(0)} = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\alpha^{(0)})$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ , а  $f_\beta^{(1)}$ ,  $\beta = 1, \dots, l$ , и  $f_\gamma^{(2)}$ ,  $\gamma = 1, \dots, m$ , определяются как решение<sup>9</sup> линейной системы  $l + m$  уравнений

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\beta^{(1)}) &= f_\beta^{(1)} + \sum_{\gamma=1}^m (\mathbf{e}_\beta^{(1)}, \mathbf{e}_\gamma^{(2)}) f_\gamma^{(2)}, \quad \beta = 1, \dots, l, \\ \dots & \\ (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\gamma^{(2)}) &= f_\gamma^{(2)} + \sum_{\beta=1}^l (\mathbf{e}_\gamma^{(2)}, \mathbf{e}_\beta^{(1)}) f_\beta^{(1)}, \quad \gamma = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{15}$$

Матрица  $M_{(l+m) \times (l+m)} = \begin{pmatrix} I_{l \times l} & B_{l \times m} \\ B_{m \times l}^+ & I_{m \times m} \end{pmatrix}$  этой системы является матрицей Грама для векторов  $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot), \mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)$ , в которой диагональные блоки суть единичные матрицы размера  $l \times l$  и  $m \times m$ ,

$$B_{l \times m} = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_1^{(2)}) & \dots & (\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_m^{(2)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_l^{(1)}, \mathbf{e}_1^{(2)}) & \dots & (\mathbf{e}_l^{(1)}, \mathbf{e}_m^{(2)}) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$B_{m \times l}^+ = (B_{l \times m})^+$  и  $+$  есть символ транспонирования, имеет положительный определитель  $\delta^2 = \det M_{(l+m) \times (l+m)}$ , равный квадрату объема  $\delta$  параллеле-

<sup>9</sup>единственное, поскольку векторы  $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot), \mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)$  линейно независимы по построению. Действительно, в случае их линейной зависимости  $\mathbf{e}(\cdot) = a^1 \mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot) + \dots + a^l \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot) = b^1 \mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot) + \dots + b^m \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(0)}$ , но  $\mathbf{e}(\cdot) = \mathbf{0}(\cdot)$ , ибо  $\mathbf{e}(\cdot) \perp \mathcal{L}^{(0)}$ , поскольку  $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_\alpha^{(0)}) = 0$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ .

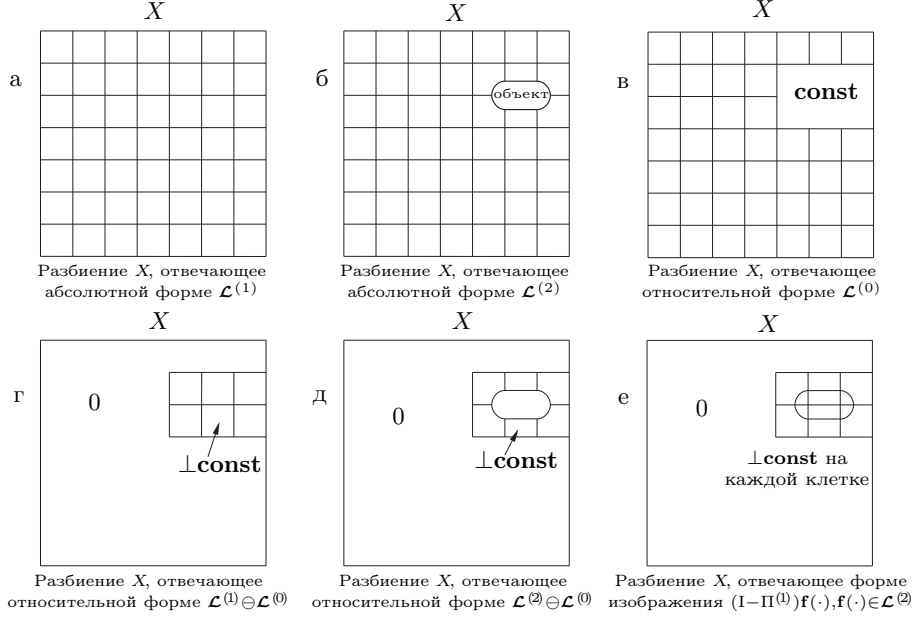


Рис. 2.3: Относительные формы в (6)–(9) в случае, когда  $N = 1$ ,  $\mathbf{a}_i^{(1)} = \mathbf{a}_i^{(2)} = \mathbf{0}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , определены разбиениями  $X$ , индикаторные функции которых представляют: а) элементы сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$ , б) элементы сцены  $\mathcal{S}^{(2)}$  и появившийся объект, в) элементы виртуальной сцены  $\mathcal{S}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)}$ : элементы, общие для сцен  $\mathcal{S}^{(1)}$  и  $\mathcal{S}^{(2)}$ ; элементы разбиения, индуцированного появившимся объектом и искаженными его появлением элементами сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$ , объединены в область  $X$ , на которой  $\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{const}$ , г) элементы виртуальной сцены  $\mathcal{S}^{(1)} \setminus \mathcal{S}^{(2)}$ : элементы сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$ , искаженные появившимся объектом на сцене  $\mathcal{S}^{(2)}$  (на этой области  $X \mathbf{f}(\cdot) \perp \mathbf{const}$ ), и оставшуюся область (на которой  $\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{0}$ ), д) элементы виртуальной сцены  $\mathcal{S}^{(2)} \setminus \mathcal{S}^{(1)}$ : появившийся объект и элементы сцены  $\mathcal{S}^{(2)}$ , искаженные его появлением (на этой области  $X \mathbf{f}(\cdot) \perp \mathbf{const}$ ), и оставшуюся область  $X$  элементов сцены  $\mathcal{S}^{(2)}$  (на которой  $\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{0}$ ), е) форму изображения  $(I - \Pi^{(1)})\mathbf{f}(\cdot)$ , полученного стандартной процедурой «выделения появившегося объекта» [10] на изображении  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}^{(2)}$  (на этой области изображения  $(I - \Pi^{(1)})\mathbf{f} \perp \mathbf{const}$  на каждой клетке).

пишется, построенного на векторах  $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot), \mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)$ , как на ребрах, причем, как нетрудно убедиться, см., например, [12],

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \det M_{(l+m) \times (l+m)} = \det(I_{l \times l}) \cdot \det(I_{m \times m} - B_{m \times l}^+ I_{l \times l} B_{l \times m}) = \\ &= \det(I_{m \times m} - B_{m \times l}^+ B_{l \times m}) = \det(I_{l \times l} - B_{l \times m} B_{m \times l}^+) > 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Поскольку в (17) матричные элементы

$$\begin{aligned} (B_{m \times l}^+ B_{l \times m})_{\alpha\beta} &= \sum_{j=1}^l (\mathbf{e}_\alpha^{(2)}, \mathbf{e}_j^{(1)}) (\mathbf{e}_j^{(1)}, \mathbf{e}_\beta^{(2)}) = \left( \sum_{j=1}^l (\mathbf{e}_\alpha^{(2)}, \mathbf{e}_j^{(1)}) \mathbf{e}_j^{(1)}, \mathbf{e}_\beta^{(2)} \right) = \\ &= (\Pi^{(1,0)} \mathbf{e}_\alpha^{(2)}, \mathbf{e}_\beta^{(2)}) = (\Pi^{(1,0)} \mathbf{e}_\alpha^{(2)}, \Pi^{(1,0)} \mathbf{e}_\beta^{(2)}), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\Pi^{(1,0)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  — ортогональный проектор, проецирующий на  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , то  $B_{m \times l}^+ B_{l \times m}$  есть матрица Грама для векторов  $\Pi^{(1,0)} \mathbf{e}_\alpha^{(2)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ . Так как согласно (17)

$$\delta^2 = \det M_{(l+m) \times (l+m)} = \det(I_{l \times l} - B_{l \times m} B_{m \times l}^+), \quad (17^*)$$

где

$$(B_{l \times m} B_{m \times l}^+)_{\alpha\beta} = (\Pi^{(2,0)} \mathbf{e}_\alpha^{(1)}, \Pi^{(2,0)} \mathbf{e}_\beta^{(1)}), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, l, \quad (18^*)$$

то в (17\*)  $B_{l \times m} B_{m \times l}^+$  есть матрица Грама для векторов  $\Pi^{(2,0)} \mathbf{e}_\alpha^{(1)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, l$ , где  $\Pi^{(2,0)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  ортогонально проецирует на  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ .

Подчеркнем, что для построения относительных форм  $S^{(0)}$ ,  $S^{(1,0)}$  и  $S^{(2,0)}$ , вообще говоря, необходимо знать обе абсолютные формы  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ . Если, однако,  $(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \perp (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$ , то  $B_{l \times m} = 0_{l \times m}$  и  $\delta^2 = 1$ . В этом случае *относительные формы*  $S^{(1,0)} = \Pi^{(1,0)}$ ,  $S^{(2,0)} = \Pi^{(2,0)}$ , и их естественно назвать *взаимно независимыми*, поскольку каждую из них можно (взаимно независимо) определить ортогональным проектором как абсолютную.

С другой стороны, пусть, например,  $l < m$ , и базисные векторы  $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot)$  стремятся соответственно к  $\mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(2)}(\cdot)$  так, чтобы  $\|\mathbf{e}_\alpha^{(1)} - \mathbf{e}_\alpha^{(2)}\| \rightarrow 0$ ,  $\alpha = 1, \dots, l$ . Тогда в (18)  $(B_{m \times l}^+ B_{l \times m})_{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^l (\mathbf{e}_\alpha^{(2)}, \mathbf{e}_j^{(1)}) (\mathbf{e}_j^{(1)}, \mathbf{e}_\beta^{(2)}) \rightarrow$

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, \dots, l, \text{ и } \delta_{\alpha\beta} = 0, \text{ если } \max\{\alpha, \beta\} \in \{l+1, \dots, m\},$$

а  $\delta^2 = \det(I_{m \times m} - B_{m \times l}^+ B_{l \times m}) \rightarrow 0$ . Этот *предельный случай* соответствует *полной зависимости (связности) относительных форм*  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и *полной связности абсолютных форм*  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ , поскольку при  $\mathbf{e}_\alpha^{(1)}(\cdot) \rightarrow \mathbf{e}_\alpha^{(2)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, l$ , «предельная» относительная форма<sup>10</sup>  $\lim(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \subset \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , а, следовательно, и «предельная» абсолютная форма  $\lim \mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)}$ .

В общем случае, так как  $\text{rank}(B_{m \times l}^+ B_{l \times m}) = \text{rank}(B_{l \times m} B_{m \times l}^+) \leq \min\{l, m\} = l < m$ , то  $\delta^2 = \det(I_{m \times m} - B_{m \times l}^+ B_{l \times m}) = \det(I_{l \times l} - B_{l \times m} B_{m \times l}^+) = \prod_{j=1}^l (1 - \lambda_j^2)$ ,

<sup>10</sup>Согласно (11–14)  $\lim(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  не являются относительными формами, ибо в то время как  $(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \cap (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) = \{\mathbf{0}\}$ ,  $(\lim(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})) \cap (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) = \lim(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$ .

где  $1 > \lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_l^2 \geq 0$  — собственные значения  $B_{l \times m} B_{m \times l}^+$ ,  $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_l^2 \geq 0 = \lambda_{l+1}^2 = \dots = \lambda_m^2$  — собственные значения  $B_{m \times l}^+ B_{l \times m}$ . Поэтому если  $\lambda_1^2 \rightarrow 1$ , то  $\delta^2 \rightarrow 0$ , а это означает, что при  $\lambda_1^2 = 1 > \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_l^2$  векторы  $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot), \mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)$  «стали линейно зависимыми» и ненулевой вектор  $\mathbf{e}(\cdot) \in (\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \cap (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$  «должен переместиться» в  $\mathcal{L}^{(0)}$ , увеличив *связность* абсолютных форм  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ ; при этом в (11)  $k \rightarrow k+1$ ,  $l \rightarrow l-1$ ,  $m \rightarrow m-1$ .

Проверим, что значение  $\delta = \delta(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \in (0, 1]$  не зависит от выбора базисов  $\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot), \mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)$  и тем самым характеризует уровень зависимости относительных форм  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ . Действительно, изменим базис  $\mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot)$  в (18), изменится матрица  $B_{m \times l}^+ B_{l \times m} = \{(\Pi^{(1,0)} \mathbf{e}_\alpha^{(2)}, \Pi^{(1,0)} \mathbf{e}_\beta^{(2)}), \alpha, \beta = 1, \dots, m\}$ , но не изменятся ее положительные собственные значения  $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \dots \geq \lambda_l^2 \geq \lambda_{l+1}^2 = \dots = \lambda_m^2 = 0$ , поскольку они совпадают с собственными значениями матрицы  $B_{l \times m} B_{m \times l}^+ = \{(\Pi^{(2,0)} \mathbf{e}_\alpha^{(1)}, \Pi^{(2,0)} \mathbf{e}_\beta^{(1)}), \alpha, \beta = 1, \dots, l\}$  в (18\*), в которой ортогональный проектор  $\Pi^{(2,0)}$  проецирует на линейную оболочку  $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}) = \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , инвариантную относительно выбора базиса  $\mathbf{e}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}$  в  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ .

Согласно сказанному функцию  $\delta = \delta(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$  естественно назвать *индексом морфологической независимости относительных форм*  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , ибо чем больше ее значение, тем менее зависимы относительные формы  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , а функцию  $\text{con} = \text{con}(\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)}) = \dim(\mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)}) / \min\{\dim \mathcal{L}^{(1)}, \dim \mathcal{L}^{(2)}\} = k / \min\{k+l, k+m\}$  естественно назвать *индексом морфологической связности абсолютных форм*  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ , ибо чем больше ее значение, тем сильнее «связаны» абсолютные формы  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$  их общей частью  $\mathcal{L}^{(0)}$ .

Например, в случае, показанном на рис. 2.2,  $\delta = \delta(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) = (1 - (\mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_1^{(2)})_3^2)^{1/2} = |\sin \varphi|$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{e}_1^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_1^{(2)}$ , а  $\text{con} = \text{con}(\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)}) = 1/2$ .

**Замечание 3.1.** В связи с данным примером покажем, что уменьшение  $|\sin \varphi|$  увеличивает не только морфологическую зависимость, но, в подобной ситуации, — и статистическую коррелированность. Пусть  $\boldsymbol{\xi} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 = \xi'_1 \mathbf{e}'_1 + \xi'_2 \mathbf{e}'_2$  — разложения случайного вектора  $\boldsymbol{\xi}$  в ортонормированном базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ,  $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)_2 = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$   $i, j = 1, 2$ , и в базисе  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ ,  $\|\mathbf{e}'_1\| = \|\mathbf{e}'_2\| = 1$ ,  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)_2 = \cos \varphi$ , образующем с базисом  $\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2$  биортонормальную систему,  $(\mathbf{e}''_i, \mathbf{e}''_j)_2 = \delta_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Если случайные координаты  $\xi_1$  и  $\xi_2$  некоррелированы,  $\mathbf{E} \xi_i \xi_j = \delta_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2$ , то  $\mathbf{E} \xi'_i \xi'_i = \|\mathbf{e}''_i\|_2^2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\mathbf{E} \xi'_1 \xi'_2 = \|\mathbf{e}''_1\|_2 \|\mathbf{e}''_2\|_2 \cos \varphi$ , где  $\mathbf{E}$  — символ математического ожидания, т. е. координаты  $\xi'_1$  и  $\xi'_2$  коррелированы, и коэффициент их корреляции равен  $\cos \varphi$ .

Суммируем полученные результаты.

**Теорема 3.1.** 1. Индекс морфологической независимости  $\delta = \delta(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \stackrel{\text{def}}{=} (\det M_{(l+m) \times (l+m)})^{1/2}$  относительных форм  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$

- равен объему  $(l + m)$ -мерного параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{e}_\alpha^{(1)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, l$ , и  $\mathbf{e}_\beta^{(2)}(\cdot)$ ,  $\beta = 1, \dots, m$ , ортонормированных базисов относительных форм  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ ;
- не зависит от выбора базисов  $\mathbf{e}_\alpha^{(1)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, l$ , и  $\mathbf{e}_\beta^{(2)}(\cdot)$ ,  $\beta = 1, \dots, m$ , и определяется только относительной ориентацией относительных форм  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  в  $\mathcal{L}$ ;
- принимает значения в  $(0, 1]$ , причем  $\delta = 1$ , если и только если относительные формы  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  морфологически независимы;
- относительные формы  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  морфологически независимы, если и только если косые проекторы  $S^{(0,1)}$  и  $S^{(0,2)}$ , проецирующие на относительную форму  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  параллельно абсолютной форме  $\mathcal{L}^{(2)}$  и соответственно — на  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  параллельно  $\mathcal{L}^{(1)}$ , совпадают соответственно с ортогональными проекторами  $\Pi^{(0,1)}$  и  $\Pi^{(0,2)}$ , проецирующими на  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и на  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ . В этом случае  $\lambda_1^2 = \dots = \lambda_l^2 = \dots = \lambda_m^2 = 0$ ;
- если же  $\lambda_1^2$  возрастает до 1, то индекс морфологической независимости убывает до 0, морфологическая зависимость относительных форм  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  возрастает и при  $\lambda_1^2 = 1$  трансформируется в морфологическую связность  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , при которой нарушено условие  $(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \cap (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) = \{\mathbf{0}(\cdot)\}$ .

2. Индекс морфологической связности  $\text{con} = \text{con}(\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)}) / \min\{\dim \mathcal{L}^{(1)}, \dim \mathcal{L}^{(2)}\} = k / \min\{k + l, k + m\}$ ,  $\min\{k, l, m\} > 0$ , абсолютных форм  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$  принимает значения в  $[0, 1]$ , причем

- $\text{con}(\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)}) = 1$ , если  $\min\{l, m\} = 0$ , в этом и только в этом случае абсолютные формы  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$  вполне связные, одна из них является «частью» другой;
- если  $\text{con}(\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)}) = 0$ , т. е. если  $k = \dim(\mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)}) = 0$ , то в этом и только в этом случае абсолютные формы  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$  вполне несвязные, их можно рассматривать и как относительные и их морфологическую зависимость охарактеризовать значением  $\delta(\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)})$ .

## 4 Построение косых проекторов и относительных форм

Рассмотрим вначале попарные сравнения форм.

#### 4.1 Построение косых проекторов при заданных ортогональных проекторах $\Pi^{(1)}$ и $\Pi^{(2)}$

Как известно, в задаче на собственные значения для самосопряженного оператора  $\Pi^{(2)} - \Pi^{(1)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  его собственные функции можно определить так, чтобы они образовали ортонормированный базис  $\mathcal{L}$ . Нас будут интересовать все те из них, которые отвечают собственному значению, равному нулю,

$$(\Pi^{(2)} - \Pi^{(1)})\mathbf{e}_\alpha^{(0)}(\cdot) = 0 \cdot \mathbf{e}_\alpha^{(0)}(\cdot), \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (19)$$

ибо их линейная оболочка<sup>11</sup>  $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1^{(0)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_k^{(0)}(\cdot)) = \mathcal{L}^{(0)}$ . Определим ортогональный проектор  $\Pi^{(0)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , проецирующий на  $\mathcal{L}^{(0)}$ , совпадающий с косым проектором  $S^{(0)}$ , проецирующим на  $\mathcal{L}^{(0)}$  вдоль  $(\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \oplus (\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)})$ ,

$$\Pi^{(0)}\mathbf{f}(x) = S^{(0)}\mathbf{f}(x) = \sum_{\alpha=1}^k (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\alpha^{(0)})\mathbf{e}_\alpha^{(0)}(x), \quad x \in X, \mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}, \quad (20)$$

где  $(\mathbf{f}, \mathbf{e}_\alpha^{(0)}) \stackrel{\text{def}}{=} \int (\mathbf{f}(x), \mathbf{e}_\alpha^{(0)}(x))_N \mu(dx)$ . Поскольку  $\mathcal{L}(\mathbf{e}_1^{(0)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_k^{(0)}(\cdot)) = \mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)} \subset \mathcal{L}^{(t)}$ ,  $t = 1, 2$ , то  $\Pi^{(t)}\Pi^{(0)} = \Pi^{(0)}\Pi^{(t)} = \Pi^{(0)}$  и, следовательно,  $\Pi^{(t)} - \Pi^{(0)}$  ортогонально проецирует на  $\mathcal{L}^{(t)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ ,  $t = 1, 2$ . Поэтому ортонормированные базисы  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  в (11) определим как ортонормированные системы собственных функций задач на собственные значения

$$\begin{aligned} (\Pi^{(1)} - \Pi^{(0)})\mathbf{e}_\beta^{(1)}(\cdot) &= \mathbf{e}_\beta^{(1)}(\cdot), \quad \beta = 1, \dots, l, \\ (\Pi^{(2)} - \Pi^{(0)})\mathbf{e}_\gamma^{(2)}(\cdot) &= \mathbf{e}_\gamma^{(2)}(\cdot), \quad \gamma = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (21)$$

соответствующих собственному значению, равному единице. Заметим, что  $\mathbf{e}_\beta^{(1)}(\cdot)$ ,  $\beta = 1, \dots, l$ , и  $\mathbf{e}_\gamma^{(2)}(\cdot)$ ,  $\gamma = 1, \dots, m$ , образующие ортонормированные базисы  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ , ортогональны  $\mathbf{e}_\alpha^{(0)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ , но, вообще говоря, не ортогональны между собой.

Итак,  $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1^{(0)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_k^{(0)}(\cdot))$ ,  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_l^{(1)}(\cdot))$ ,  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}(\mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_m^{(2)}(\cdot))$  и для  $\mathbf{f}(\cdot)$  в (11)

$$S^{(0)}\mathbf{f}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^k f_\alpha^{(0)}\mathbf{e}_\alpha^{(0)}(\cdot), \quad S^{(1,0)}\mathbf{f}(\cdot) = \sum_{\beta=1}^l f_\beta^{(1)}\mathbf{e}_\beta^{(1)}(\cdot), \quad S^{(2,0)}\mathbf{f}(\cdot) = \sum_{\gamma=1}^m f_\gamma^{(2)}\mathbf{e}_\gamma^{(2)}(\cdot),$$

где  $f_\alpha^{(0)} = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\alpha^{(0)})$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ , а  $f_\beta^{(1)}$ ,  $\beta = 1, \dots, l$ ,  $f_\gamma^{(2)}$ ,  $\gamma = 1, \dots, m$ , определены как решение системы (15).

#### 4.2 Построение косых проекторов при заданных ортогональных проекторах $\Pi^{(1)}$ , $\Pi^{(2)}$ и $\Pi^{(3)}$

Рассмотрим теперь построение относительных форм и представляющих их косых проекторов в более сложной ситуации, когда заданы три абсолютные

<sup>11</sup>Если таких собственных векторов нет, то  $\mathcal{L}^{(0)} = \{0\}$ .



формы  $\mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}^{(2)}$  и  $\mathcal{L}^{(3)}$  и представляющие их ортогональные проекторы  $\Pi^{(1)}$ ,  $\Pi^{(2)}$  и  $\Pi^{(3)}$ .

Пусть  $\mathcal{L}^{(1)}$  — абсолютная форма формопределяющего класса  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(1)}}$  изображений сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$ , полученных при «стандартном», например, при однородном освещении. Класс  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(1)}}$  зададим равенством

$$\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(1)}} = \{\mathbf{f}^{(1)}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i \chi_i(\cdot), \mathbf{c}_i \neq \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \in \mathcal{R}^N, i, j = 1, \dots, n\}. \quad (22)$$

Пусть  $\mathcal{L}^{(2)}$  — абсолютная форма класса изображений «освещений» сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$ , определенная как замыкание линейного многообразия

$$\mathcal{L}^{(2)} = \text{Cl}\{\mathbf{f}^{(2)}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i(\cdot) \chi_i(\cdot), \mathbf{c}_i(x) = \mathbf{f}(x) \chi_i(x), \mu(A_i) > 0, i = 1, \dots, n, \mathbf{f}(\cdot) \in \mathbf{F}\}, \quad (23)$$

где  $\mathbf{F}$  — заданное линейное многообразие возможных освещений  $\mathbf{f}(\cdot): X \rightarrow \mathcal{R}^N$ , содержащее однородное освещение  $\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f} \in \mathcal{R}^N$ . Пусть, наконец,  $\mathcal{L}^{(3)}$  — абсолютная форма формопределяющего класса  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(3)}}$  изображений «нестандартно» освещенной сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$ , на которой появились «неизвестные» объекты; обозначим эту сцену  $\mathcal{S}^{(3)}$ . Форму  $\mathcal{L}^{(3)}$  изображений сцены  $\mathcal{S}^{(3)}$  определим равенством

$$\mathcal{L}^{(3)} = \text{Cl}\{\mathbf{f}^{(3)}(x) = (1 - \chi_0(x)) \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{f}(x) \chi_i(x) + c_0 \mathbf{f}(x) \chi_0(x), x \in X, c_i \in \mathcal{R}^1, i = 0, 1, \dots, n, \mathbf{f}(\cdot) \in \mathbf{F}\}, \quad (24)$$

в котором индикаторная функция  $\chi_0(\cdot)$ ,  $\mu(A_0) > 0$ , представляет на изображении  $\mathbf{f}^{(3)}(\cdot)$  в (24) появившиеся «неизвестные» объекты, локализация которых на сцене  $\mathcal{S}^{(3)}$  неизвестна.

Пусть для простоты  $\mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}^{(2)}$  и  $\mathcal{L}^{(3)}$  — конечномерные подпространства  $\mathcal{L}_{\mu}^2(X)$  и  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(3)}$ . Определим следующие подпространства  $\mathcal{L}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1,2,3)} &= \mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)} \cap \mathcal{L}^{(3)}, \mathcal{L}_0^{(1,2)} = (\mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)}) \ominus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}, \\ \mathcal{L}_0^{(2,3)} &= (\mathcal{L}^{(2)} \cap \mathcal{L}^{(3)}) \ominus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}, \mathcal{L}_0^{(3,1)} = (\mathcal{L}^{(3)} \cap \mathcal{L}^{(1)}) \ominus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}, \\ \mathcal{L}_0^{(1)} &= \mathcal{L}^{(1)} \ominus (\mathcal{L}_0^{(1,2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3,1)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}), \\ \mathcal{L}_0^{(2)} &= \mathcal{L}^{(2)} \ominus (\mathcal{L}_0^{(2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}), \\ \mathcal{L}_0^{(3)} &= \mathcal{L}^{(3)} \ominus (\mathcal{L}_0^{(3,1)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}), \end{aligned} \quad (25)$$

и образуем прямую сумму относительных форм

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{(1,2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3,1)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3)} \quad (26)$$

где  $\mathcal{L}_0^{(1,2,3)}$  — относительная форма формопределяющего класса  $\mathbf{J}_{\mathcal{S}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)} \cap \mathcal{S}^{(3)}}$  изображений виртуальной сцены  $\mathcal{S}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)} \cap \mathcal{S}^{(3)}$ , принадлежащих абсолютным формам  $\mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}^{(2)}$  и  $\mathcal{L}^{(3)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(1,2)}$  — относительная форма формопределяющего класса  $\mathbf{J}_{(\mathcal{S}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)}) \setminus \mathcal{S}^{(3)}}$  изображений виртуальной

сцены  $(\mathcal{S}^{(1)} \cap \mathcal{S}^{(2)}) \setminus \mathcal{S}^{(3)}$ , принадлежащих абсолютным формам  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ , но не принадлежащих абсолютной форме  $\mathcal{L}^{(3)}$ , и т. д.

Рассмотрим ортонормированные базисы относительных форм  $\mathcal{L}_0^{(1,2,3)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(1,2)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(2,3)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(3,1)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(2)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(3)}$ . В диаграмме

$$\begin{array}{c}
\mathcal{L}_0^{(1,2,3)} \sim \left\{ \mathbf{e}_1^{(1,2,3)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_{1,2,3}}^{(1,2,3)}(\cdot) \right\} \rightarrow \mathcal{L}_0^{(1,2)} \sim \left\{ \mathbf{e}_1^{(1,2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_{1,2}}^{(1,2)}(\cdot) \right\} \rightarrow \\
\mathcal{L}_0^{(2,3)} \sim \left\{ \mathbf{e}_1^{(2,3)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_{2,3}}^{(2,3)}(\cdot) \right\} \rightarrow \\
\mathcal{L}_0^{(3,1)} \sim \left\{ \mathbf{e}_1^{(3,1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_{3,1}}^{(3,1)}(\cdot) \right\} \rightarrow \\
\rightarrow \mathcal{L}_0^{(1)} \sim \left\{ \mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_1}^{(1)}(\cdot) \right\} \\
\downarrow \\
\rightarrow \mathcal{L}_0^{(2)} \sim \left\{ \mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_2}^{(2)}(\cdot) \right\} \\
\downarrow \\
\rightarrow \mathcal{L}_0^{(3)} \sim \left\{ \mathbf{e}_1^{(3)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_3}^{(3)}(\cdot) \right\} \\
\downarrow \\
\mathcal{L}_0^{(1)} \sim \left\{ \mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_1}^{(1)}(\cdot) \right\}
\end{array} \tag{27}$$

векторы  $\mathbf{e}_\alpha^{(i,j)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_{i,j}$ , ортонормированного базиса  $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$  дополняют векторы  $\mathbf{e}_\lambda^{(1,2,3)}(\cdot)$ ,  $\lambda = 1, \dots, k_{1,2,3}$ , ортонормированного базиса  $\mathcal{L}_0^{(1,2,3)}$  до ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_1^{(1,2,3)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_{1,2,3}}^{(1,2,3)}(\cdot), \mathbf{e}_1^{(i,j)}(\cdot), \dots, \mathbf{e}_{k_{i,j}}^{(i,j)}(\cdot)$   $\mathcal{L}^{(i,j)} = \mathcal{L}_0^{(1,2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(i,j)}$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , а векторы  $\mathbf{e}_\alpha^{(i)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_i$ , образующие ортонормированный базис  $\mathcal{L}_0^{(i)} = \mathcal{L}^{(i)} \ominus (\mathcal{L}_0^{(1,2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(i,j)} \oplus \mathcal{L}_0^{(l,i)})$ , выбираются ортонормированными и ортогональными ортонормированным векторам базисов  $\mathcal{L}^{(l,i)}$  и  $\mathcal{L}^{(l,i)}$ , дополняя их до базиса  $\mathcal{L}^{(i)}$ , вообще говоря, не ортонормированного,  $i \neq j \neq l \neq i$ ,  $i, j, l = 1, 2, 3$ .

Поэтому в диаграмме (27) векторы  $\mathbf{e}_\alpha^{(i)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_i$ , ортонормированного базиса  $\mathcal{L}_0^{(i)}$  ортогональны как векторам  $\mathbf{e}_\beta^{(i,j)}(\cdot)$ ,  $\beta = 1, \dots, k_{i,j}$ , и векторам  $\mathbf{e}_\beta^{(l,i)}(\cdot)$ ,  $\beta = 1, \dots, k_{l,i}$ , ортонормированных базисов  $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$  и  $\mathcal{L}_0^{(l,i)}$ ,  $i \neq j \neq l \neq i$ ,  $i, j, l = 1, 2, 3$ , так и векторам  $\mathbf{e}_\lambda^{(1,2,3)}(\cdot)$ ,  $\lambda = 1, \dots, k_{1,2,3}$ , ортонормированного базиса  $\mathcal{L}_0^{(1,2,3)}$ , которые в свою очередь ортогональны векторам ортонормированных базисов  $\mathcal{L}_0^{(i,j)}$  и  $\mathcal{L}_0^{(l,i)}$ ,  $i \neq j \neq l \neq i$ ,  $i, j, l = 1, 2, 3$ . Заметим, что векторы  $\mathbf{e}_\alpha^{(i)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_i$ , и векторы  $\mathbf{e}_\alpha^{(j)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , вообще говоря, попарно не ортогональны, равно как векторы  $\mathbf{e}_\beta^{(i,j)}(\cdot)$ ,  $\beta = 1, \dots, k_{i,j}$ , и векторы  $\mathbf{e}_\beta^{(l,i)}(\cdot)$ ,  $\beta = 1, \dots, k_{l,i}$ ,  $i \neq j \neq l \neq i$ ,  $i, j, l = 1, 2, 3$ .

Соответственно косые проекторы, представляющие относительные фор-

мы в (27)

$$\begin{aligned}
S^{(1,2,3)}\mathbf{f}(\cdot) &= f_1^{(1,2,3)}\mathbf{e}_1^{(1,2,3)}(\cdot) + \dots + f_{k_{1,2,3}}^{(1,2,3)}\mathbf{e}_{k_{1,2,3}}^{(1,2,3)}(\cdot), \\
S^{(1,2)}\mathbf{f}(\cdot) &= f_1^{(1,2)}\mathbf{e}_1^{(1,2)}(\cdot) + \dots + f_{k_{1,2}}^{(1,2)}\mathbf{e}_{k_{1,2}}^{(1,2)}(\cdot), \\
S^{(2,3)}\mathbf{f}(\cdot) &= f_1^{(2,3)}\mathbf{e}_1^{(2,3)}(\cdot) + \dots + f_{k_{2,3}}^{(2,3)}\mathbf{e}_{k_{2,3}}^{(2,3)}(\cdot), \\
S^{(3,1)}\mathbf{f}(\cdot) &= f_1^{(3,1)}\mathbf{e}_1^{(3,1)}(\cdot) + \dots + f_{k_{3,1}}^{(3,1)}\mathbf{e}_{k_{3,1}}^{(3,1)}(\cdot), \\
S^{(1)}\mathbf{f}(\cdot) &= f_1^{(1)}\mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot) + \dots + f_{k_1}^{(1)}\mathbf{e}_{k_1}^{(1)}(\cdot), \\
S^{(2)}\mathbf{f}(\cdot) &= f_1^{(2)}\mathbf{e}_1^{(2)}(\cdot) + \dots + f_{k_2}^{(2)}\mathbf{e}_{k_2}^{(2)}(\cdot), \\
S^{(3)}\mathbf{f}(\cdot) &= f_1^{(3)}\mathbf{e}_1^{(3)}(\cdot) + \dots + f_{k_3}^{(3)}\mathbf{e}_{k_3}^{(3)}(\cdot), \mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L},
\end{aligned} \tag{28}$$

где согласно (25), (26)  $S^{(1,2,3)} + S^{(1,2)} + S^{(2,3)} + S^{(3,1)} + S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} = \mathbf{I}$ .

Для определения базисных векторов в (27) заметим, что если проектор  $\Pi^{(i)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  ортогонально проецирует на  $\mathcal{L}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то

$$\Pi_0^{(1,2,3)}\mathbf{f}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^{k_{1,2,3}} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\alpha^{(1,2,3)})\mathbf{e}_\alpha^{(1,2,3)}(\cdot), \mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}, \tag{29}$$

есть проектор  $\Pi_0^{(1,2,3)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , ортогонально проецирующий на  $\mathcal{L}_0^{(1,2,3)} = \mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)} \cap \mathcal{L}^{(3)}$ , где векторы  $\mathbf{e}_\alpha^{(1,2,3)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_{1,2,3}$ , в (28), (29) суть ортонормированные решения задачи

$$\Pi^{(i)}\mathbf{e}_\alpha^{(1,2,3)}(\cdot) = \mathbf{e}_\alpha^{(1,2,3)}(\cdot), \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, \dots, k_{1,2,3}; \tag{30}$$

если  $\Pi^{(i,j)}\mathbf{f}(\cdot) = \sum_{\alpha=1}^{q_{i,j}} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\alpha)\mathbf{e}_\alpha(\cdot)$  есть проектор  $\Pi^{(i,j)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , ортогонально проецирующий на  $\mathcal{L}^{(i,j)} = \mathcal{L}^{(i)} \cap \mathcal{L}^{(j)}$ , где  $\mathbf{e}_\alpha(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, q_{i,j}$ , суть ортонормированные решения задачи

$$\Pi^{(i)}\mathbf{e}_\alpha(\cdot) = \Pi^{(j)}\mathbf{e}_\alpha(\cdot) = \mathbf{e}_\alpha(\cdot), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \tag{31}$$

то  $\Pi_0^{(i,j)} = \Pi^{(i,j)} - \Pi_0^{(1,2,3)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  есть проектор, ортогонально проецирующий на  $\mathcal{L}_0^{(i,j)} = \mathcal{L}^{(i,j)} \ominus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ , а  $\Pi_0^{(i)} = \Pi^{(i)} - \Pi_0^{(i,j)} - \Pi_0^{(k,i)} - \Pi_0^{(1,2,3)}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  есть проектор, ортогонально проецирующий на  $\mathcal{L}_0^{(i)} = \mathcal{L}^{(i)} \ominus (\mathcal{L}_0^{(i,j)} \oplus \mathcal{L}_0^{(k,i)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)})$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j \neq k \neq i$ . Соответственно ортонормированные системы  $\mathbf{e}_\alpha^{(i,j)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ , и  $\mathbf{e}_\alpha^{(i)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в (28) суть ортонормированные решения задач на собственные значения  $\Pi_0^{(i,j)}\mathbf{e}_\alpha^{(i,j)}(\cdot) = \mathbf{e}_\alpha^{(i,j)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ , и  $\Pi_0^{(i)}\mathbf{e}_\alpha^{(i)}(\cdot) = \mathbf{e}_\alpha^{(i)}(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Таким образом будут определены относительные формы в (25).

Для определения косых проекторов (28) запишем разложение

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} = & \underbrace{\mathbf{f}_1^{(1,2,3)} \mathbf{e}_1^{(1,2,3)}(\cdot) + \dots + \mathbf{f}_{k_{1,2,3}}^{(1,2,3)} \mathbf{e}_{k_{1,2,3}}^{(1,2,3)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}} + \\
& \underbrace{\mathbf{f}_1^{(1,2)} \mathbf{e}_1^{(1,2)}(\cdot) + \dots + \mathbf{f}_{k_{1,2}}^{(1,2)} \mathbf{e}_{k_{1,2}}^{(1,2)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}_0^{(1,2)}} + \underbrace{\mathbf{f}_1^{(2,3)} \mathbf{e}_1^{(2,3)}(\cdot) + \dots + \mathbf{f}_{k_{2,3}}^{(2,3)} \mathbf{e}_{k_{2,3}}^{(2,3)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}_0^{(2,3)}} + \\
& \underbrace{\mathbf{f}_1^{(3,1)} \mathbf{e}_1^{(3,1)}(\cdot) + \dots + \mathbf{f}_{k_{3,1}}^{(3,1)} \mathbf{e}_{k_{3,1}}^{(3,1)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}_0^{(3,1)}} + \underbrace{\mathbf{f}_1^{(1)} \mathbf{e}_1^{(1)}(\cdot) + \dots + \mathbf{f}_{k_1}^{(1)} \mathbf{e}_{k_1}^{(1)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}_0^{(1)}} + \\
& \underbrace{\mathbf{f}_2^{(2)} \mathbf{e}_2^{(2)}(\cdot) + \dots + \mathbf{f}_{k_2}^{(2)} \mathbf{e}_{k_2}^{(2)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}_0^{(2)}} + \underbrace{\mathbf{f}_3^{(3)} \mathbf{e}_3^{(3)}(\cdot) + \dots + \mathbf{f}_{k_3}^{(3)} \mathbf{e}_{k_3}^{(3)}(\cdot)}_{\in \mathcal{L}_0^{(3)}}, \quad (32)
\end{aligned}$$

коэффициенты его определим подобно тому, как это сделано при определении коэффициентов разложения в (11), тем самым будут определены искомые косые проекторы  $S^{(1,2,3)}$ ,  $S^{(i,j)}$ ,  $S^{(i)}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ , индексы морфологической связности абсолютных форм  $\mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}^{(2)}$ ,  $\mathcal{L}^{(3)}$  и морфологической независимости относительных форм  $\mathcal{L}_0^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(2)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(3)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(1,2)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(2,3)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(3,1)}$ .

**Замечание 4.1.** Задачи *построения* относительных форм в случае, когда абсолютные формы изображений заданы выпуклыми замкнутыми конусами  $\mathcal{C}^{(1)}$  и  $\mathcal{C}^{(2)}$  в  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$  и представляющими их проекторами  $P^{(1)}$  и  $P^{(2)}$ , *исследования* связи абсолютных форм и зависимости относительных форм подобны рассмотренным задачам для форм изображений, заданных как подпространства  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , но технически существенно сложнее. Дело в том, что хотя  $\mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{C}^{(1)} \cap \mathcal{C}^{(2)}$  и  $\mathcal{C} = \text{Cl}(\mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)})$  суть выпуклые и замкнутые конусы, относительные формы, определенные как конусы  $\text{Cl}(\mathcal{C}^{(1)} \setminus \mathcal{C}^{(0)})$  и  $\text{Cl}(\mathcal{C}^{(2)} \setminus \mathcal{C}^{(0)})$  в общем случае не выпуклы и, более того, построение проекторов  $P^{(1)}$  и  $P^{(2)}$  — задача непростая. Видимо, такой путь исследований не эффективен. Но если зависимость этих относительных форм охарактеризовать *локально*, см. замечание 5.1, зависимостью форм  $\lambda^{(1)} \mathbf{e}^{(1)}(\cdot)$ ,  $\lambda^{(1)} > 0$ , и  $\lambda^{(2)} \mathbf{e}^{(2)}(\cdot)$ ,  $\lambda^{(2)} > 0$ , содержащихся в них изображений  $\mathbf{e}^{(1)}(\cdot) \in \text{Cl}(\mathcal{C}^{(1)} \setminus \mathcal{C}^{(0)})$  и  $\mathbf{e}^{(2)}(\cdot) \in \text{Cl}(\mathcal{C}^{(2)} \setminus \mathcal{C}^{(0)})$ , то, задав вероятность  $\text{Pr}((\mathbf{e}^{(1)}(\cdot), \mathbf{e}^{(2)}(\cdot)) \in Q)$ ,  $Q \in \mathcal{A}$ , где  $\mathcal{A}$  — некоторая  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\mathcal{C}$  [31, 32], морфологическую зависимость относительных форм  $\text{Cl}(\mathcal{C}^{(1)} \setminus \mathcal{C}^{(0)})$  и  $\text{Cl}(\mathcal{C}^{(2)} \setminus \mathcal{C}^{(0)})$  можно охарактеризовать отношением  $\text{Pr}(\mathbf{e}^{(1)}(\cdot) \in \text{Cl}(\mathcal{C}^{(2)} \setminus \mathcal{C}^{(0)}), \mathbf{e}^{(2)}(\cdot) \in \text{Cl}(\mathcal{C}^{(1)} \setminus \mathcal{C}^{(0)})) / \text{Pr}(\mathbf{e}^{(1)}(\cdot) \in \text{Cl}(\mathcal{C}^{(1)} \setminus \mathcal{C}^{(0)}), \mathbf{e}^{(2)}(\cdot) \in \text{Cl}(\mathcal{C}^{(2)} \setminus \mathcal{C}^{(0)}))$ , морфологическую связность абсолютных форм  $\mathcal{C}^{(1)}$  и  $\mathcal{C}^{(2)}$  — отношением  $\text{Pr}(\mathbf{e}^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{C}^{(0)}, \mathbf{e}^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{C}^{(0)}) / \text{Pr}(\mathbf{e}^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{C}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{C}^{(2)})$ , а отношение  $\text{Pr}(\mathbf{e}_1(\cdot) \in \mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}^{(1)} \cup \mathcal{C}^{(2)}), \mathbf{e}_2(\cdot) \in \mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}^{(1)} \cup \mathcal{C}^{(2)})) / \text{Pr}(\mathbf{e}_1(\cdot) \in \mathcal{C}^{(1)} \cup \mathcal{C}^{(2)}, \mathbf{e}_2(\cdot) \in \mathcal{C}^{(1)} \cup \mathcal{C}^{(2)})$  характеризует то, насколько вероятностная модель контролирует задачу при условии, что  $\text{Pr}(\mathbf{e}_1(\cdot) \in \mathcal{C}, \mathbf{e}_2(\cdot) \in \mathcal{C}) = 1$ .

## 5 Косое проецирование в задачах морфологического анализа изображений

### 5.1 Выделение изображений неизвестных объектов

В случае моделей (6)–(9) классов изображений сцен  $\mathcal{S}^{(1)}$  и  $\mathcal{S}^{(2)}$  относительные формы  $\mathcal{L}_0^{(1)} = \mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  и  $\mathcal{L}_0^{(2)} = \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  их изображений и представляющие их косые проекторы  $S^{(1,0)}$  и  $S^{(2,0)}$ , построенные в п. 2, 4, позволяют решить задачу выделения изображения неизвестного объекта на изображении  $\mathbf{f}(\cdot)$  сцены  $\mathcal{S}^{(2)}$ , а именно: косая проекция  $S^{(2,0)}\mathbf{f}(\cdot)$  изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$  на относительную форму  $\mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  вдоль абсолютной формы  $\mathcal{L}^{(1)} = (\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}) \oplus \mathcal{L}^{(0)}$  содержит все, чем отличаются изображения сцены  $\mathcal{S}^{(2)}$  от изображений сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$ . Согласно рис. 2.3 д в случае, когда в (7) и в (9)  $N = 1$ ,  $\mathbf{a}_i^{(1)} = \mathbf{a}_i^{(2)} = \mathbf{0}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , косая проекция  $S^{(2,0)}\mathbf{f}(\cdot)$  содержит изображения неизвестного объекта и элементов сцены  $\mathcal{S}^{(2)}$ , искаженных появившимся объектом. В этой задаче «качество» выделения изображения объекта возрастает с увеличением индексов морфологической связности и независимости.

В рассмотренных в п. 4.2 моделях изображений сцен  $\mathcal{S}^{(1)}$ ,  $\mathcal{S}^{(3)}$  и освещений, охарактеризованных абсолютной формой  $\mathcal{L}^{(2)}$  (23), важнейшей является задача выделения на изображении  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}^{(3)}$  «нестандартно» освещенной сцены  $\mathcal{S}^{(1)}$  изображения появившихся на ней «неизвестных» объектов. В этой задаче представляет интерес слагаемое  $\mathcal{L}_0^{(3)}$  в разложении (26), содержащее изображения, свойственные только сцене  $\mathcal{S}^{(3)}$ , отличающие ее изображения от изображений из  $\mathcal{L}^{(1)}$  и из  $\mathcal{L}^{(2)}$ , и косой проектор  $S^{(3)}$ , проецирующий на  $\mathcal{L}_0^{(3)}$  вдоль  $\mathcal{L}_0^{(1,2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3,1)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2)} = \mathcal{L} \ominus \mathcal{L}_0^{(3)}$ . Косая проекция  $S^{(3)}\mathbf{f}(\cdot)$  содержит изображения появившихся объектов, возможно, искаженное отсутствием деталей, содержащихся в  $\mathcal{L} \ominus \mathcal{L}_0^{(3)}$ . Можно использовать косой проектор  $S^{(3)} + S^{(2,3)}$ , если допустимо появление на проекции  $(S^{(3)} + S^{(2,3)})\mathbf{f}(\cdot)$  изображений, обусловленных «нестандартным» освещением.

### 5.2 Морфологическая фильтрация помех.

Пусть

$$\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}^{(1)}(\cdot) + \mathbf{f}^{(2)}(\cdot) \quad (33)$$

— наблюдаемое изображение, в котором  $\mathbf{f}^{(1)}(\cdot)$  — его «полезная», «информативная» составляющая,  $\mathbf{f}^{(2)}(\cdot)$  — «мешающая» составляющая, помеха, причем известно лишь что  $\mathbf{f}^{(1)}(\cdot) \in \mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathbf{f}^{(2)}(\cdot) \in \mathcal{L}^{(2)}$ , где  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$  — известные подпространства  $\mathcal{L}_\mu^2(X)$ , определяющие абсолютные формы изображений, несущих «полезную» информацию и помеху. Если  $\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{L}^{(2)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(1)} = \mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(2)} = \mathcal{L}^{(2)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  суть относительные формы, включающие:  $\mathcal{L}^{(0)}$  — изображения, которые характерны как для «информативной»,

так и для «мешающей» составляющих изображения (33),  $\mathcal{L}_0^{(1)}$  — изображения «информативной» составляющей, «очищенной» от «мешающей» составляющей и  $\mathcal{L}_0^{(2)}$  — изображения «мешающей» составляющей без «информативной» добавки, то  $S^{(1,0)}\mathbf{f}(\cdot)$ ,  $S^{(0)}\mathbf{f}(\cdot)$  и  $S^{(2,0)}\mathbf{f}(\cdot)$  — составляющие изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$  (33), относящиеся соответственно к «содержимому» относительно форм  $\mathcal{L}_0^{(1)}$ ,  $\mathcal{L}_0^{(0)}$  и  $\mathcal{L}_0^{(2)}$ , представленных косыми проекторами  $S^{(1,0)}$ ,  $S^{(0)}$  и  $S^{(2,0)}$ .

Заметим, что  $S^{(1,0)}\mathbf{f}(\cdot)$  — проекция  $\mathbf{f}(\cdot)$  на  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}^{(0)}$  вдоль  $\mathcal{L}^{(0)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2)} = \mathcal{L}^{(2)}$ , т. е. — «очищенная» от помехи и потому, возможно, искаженная отсутствием деталей, свойственных и помехе, «информативная» составляющая  $\mathbf{f}(\cdot)$ ,  $(I - S^{(2,0)})\mathbf{f}(\cdot)$  — проекция  $\mathbf{f}(\cdot)$  на  $\mathcal{L}_0^{(1)} \oplus \mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}^{(1)}$  вдоль  $\mathcal{L}_0^{(2)}$ , т. е. — составляющая  $\mathbf{f}^{(1)}(\cdot)$  в (33), возможно, содержащая «часть» помехи, «промежуточные» и другие варианты охарактеризованы в замечании 2.2.

Такой метод морфологической фильтрации может быть особенно эффективным, если  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$  суть абсолютные формы изображений, каждое из которых несет смысловую нагрузку, разную для изображений из  $\mathcal{L}^{(1)}$  и из  $\mathcal{L}^{(2)}$ . Понятно, что чем больше значение индекса  $\delta = \delta(\mathcal{L}_0^{(1)}, \mathcal{L}_0^{(2)})$  морфологической независимости относительных форм  $\mathcal{L}_0^{(1)}$  и  $\mathcal{L}_0^{(2)}$  и чем меньше значение индекса  $\text{cop} = \text{cop}(\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)})$  связности форм  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ , тем эффективнее фильтрация.

**Замечание 5.1.** Для содержательного анализа решений задач, рассмотренных в §§ 5.1, 5.2, следует применять более гибкий метод косого проецирования, эффективный и в тех случаях, когда формы заданы выпуклыми замкнутыми конусами  $\mathcal{C}^{(i)} \subset \mathcal{L}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ . Идею метода рассмотрим на примере ситуации, представленной на рис. 2.2.

Охарактеризуем класс всех разложений  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$ ,  $\mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{L}^{(2)}$ , фиксированного вектора  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^3$ , см. замечание 2.2, определив класс косых проекторов  $S_{\mathcal{R}_f^2}^{(1)}$  и  $S_{\mathcal{R}_f^2}^{(2)} = I - S_{\mathcal{R}_f^2}^{(1)}$ ,  $\mathcal{R}_f^2 \in \mathbb{R}_f$ , проецирующих на  $\mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{R}_f^2$  вдоль  $\mathcal{L}^{(2)} \cap \mathcal{R}_f^2$  и соответственно на  $\mathcal{L}^{(2)} \cap \mathcal{R}_f^2$  вдоль  $\mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{R}_f^2$ , где  $\mathbb{R}_f$  — класс (пучок) плоскостей  $\mathcal{R}_f^2 \subset \mathcal{R}^3$ , содержащих  $\mathbf{f}$ . Каждая плоскость  $\mathcal{R}_f^2$  определяет разложение  $\mathbf{f} = S_{\mathcal{R}_f^2}^{(1)}\mathbf{f} + S_{\mathcal{R}_f^2}^{(2)}\mathbf{f}$ , в котором  $S_{\mathcal{R}_f^2}^{(i)}\mathbf{f} \in \mathcal{L}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ ; поворачивая  $\mathcal{R}_f^2$  вокруг  $\mathbf{f}$ , получим все разложения  $\mathbf{f}$ , в частности, — использованные в §§ 5.1, 5.2, относящиеся к рассматриваемому примеру, и все «промежуточные», полезные при «локальном» анализе результатов;  $\{S_{\mathcal{R}_f^2}^{(1)}\mathbf{f} + S_{\mathcal{R}_f^2}^{(2)}\mathbf{f}, \mathcal{R}_f^2 \in \mathbb{R}_f\}$  — класс всех разложений  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^3$ , см. рис. 5.1 и замечание 2.2. Заметим также, что:

- Если формы заданы конусами  $\mathcal{C}^{(i)} \subset \mathcal{L}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , то разложение  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$ ,  $\mathbf{f}^{(i)} \in \mathcal{C}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , возможно<sup>12</sup>, если (и только если)  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)}$ ,

<sup>12</sup> $\mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)}$  — конус векторов  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$ ,  $\mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)}$ ,  $\mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}$ .

соответственно класс всех разложений  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^3$ :

$$\begin{aligned} & \{S_{\mathcal{R}_f^2}^{(1)}\mathbf{f} + S_{\mathcal{R}_f^2}^{(2)}\mathbf{f}, \mathcal{R}_f^2 \in \mathbb{R}_f\}, \text{ если } \mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)}, \\ & \emptyset, \text{ если } \mathbf{f} \in \mathcal{R}^3 \setminus (\mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)}). \end{aligned} \quad (*)$$

• Если на классе всех подмножеств  $\mathcal{R}^3$  задана мера, в данном случае — мера возможности, локализованная на  $\mathcal{C}^{(1)} \cup \mathcal{C}^{(2)}$ , то разложение  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$  — реализация равенства  $\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}$ , в котором  $\varphi$  — наблюдаемый нечеткий вектор,  $\varphi^{(1)}$  и  $\varphi^{(2)}$  — независимые нечеткие векторы,  $g^{\varphi^{(i)}}(\mathbf{f}^{(i)}) = 1$ ,  $\mathbf{f}^{(i)} \in \mathcal{C}^{(i)}$ ,  $g^{\varphi^{(i)}}(\mathbf{f}^{(i)}) = 0$ ,  $\mathbf{f}^{(i)} \notin \mathcal{C}^{(i)}$ ,  $\mathbf{f}^{(i)} \in \mathcal{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ , — распределения возможностей их значений, см. замечание 2.1, то класс *оценок*  $\mathbf{f}_*^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{f})$ ,  $i = 1, 2$ , *максимальной возможности* [25], минимизирующих возможность ошибочного разложения  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$ ,  $\mathbf{f}^{(i)} \in \mathcal{R}^3$ ,  $i = 1, 2$ , есть  $\{\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{f}) + \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{f}) : \min\{g^{\varphi^{(1)}}(\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{f})), g^{\varphi^{(2)}}(\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{f}))\} = \max(\min\{g^{\varphi^{(1)}}(\mathbf{f}^{(1)}), g^{\varphi^{(2)}}(\mathbf{f}^{(2)})\} \mid \mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{R}^3, \mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{R}^3, \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f})\}$ , если  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)}$ , или  $\emptyset$ , если  $\mathbf{f} \notin \mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)}$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^3$ , что совпадает с классом (\*).

• Наконец, в общем случае, если нечеткая модель наблюдения задана полунепрерывным сверху распределением возможностей  $g^{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}}(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)})$  равенств  $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) = (\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)})$ ,  $(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}) \in \mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3$ , удовлетворяющим условию:  $g^{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}}(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}) = 0$  при  $\mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{R}^3 \setminus (\mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)})$ , то класс *оптимальных* разложений  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_*^{(1)} + \mathbf{f}_*^{(2)}$  будет определен условием  $g^{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}}(\mathbf{f}_*^{(1)}, \mathbf{f}_*^{(2)}) = \max\{g^{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}}(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}) \mid \mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)}, \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)} = \mathbf{f}\}$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)}$ . Более того, по такой же схеме класс оптимальных разложений может быть получен и в случае, когда наблюдается  $\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \nu$ , где  $\nu$  — нечеткий вектор шума со значениями в  $\mathcal{R}^3$ .

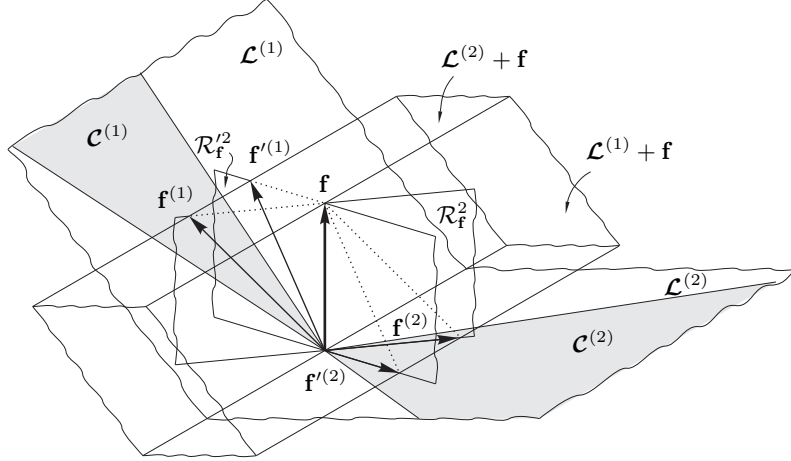


Рис. 5.1: Разложения  $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^3$ .

1. Если абсолютные формы заданы подпространствами  $\mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{L}^{(2)}$ , то все разложения  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$  образуют пары  $\mathbf{f}^{(1)} = S_{\mathcal{R}_f^2}^{(1)} \mathbf{f} \in \mathcal{L}^{(1)} \cap \mathcal{R}_f^2$  и  $\mathbf{f}^{(2)} = S_{\mathcal{R}_f^2}^{(2)} \mathbf{f} \in \mathcal{L}^{(2)} \cap \mathcal{R}_f^2$ ,  $\mathcal{R}_f^2 \in \mathbb{R}_f$ , и только они.
2. Если формы заданы конусами  $\mathcal{C}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(1)}$  и  $\mathcal{C}^{(2)} \subset \mathcal{L}^{(2)}$ , то все разложения  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$  образуют пары  $\mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{C}^{(1)} \cap \mathcal{R}_f^2$  и  $\mathbf{f}^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)} \cap \mathcal{R}_f^2$ ,  $\mathcal{R}_f^2 \in \mathbb{R}_f$ , и только они; пара  $\mathbf{f}'^{(1)} \notin \mathcal{C}^{(1)} \cap \mathcal{R}_f^2$  и  $\mathbf{f}'^{(2)} \in \mathcal{C}^{(2)} \cap \mathcal{R}_f^2$  не образует разложения  $\mathbf{f}$  в случае 2., но образует разложение  $\mathbf{f} = \mathbf{f}'^{(1)} + \mathbf{f}'^{(2)}$  в случае 1.
3. Индекс морфологической независимости форм  $\mathcal{C}^{(1)}$  и  $\mathcal{C}^{(2)}$ , в данном случае относительных, естественно определить как максимальное по  $\mathcal{R}_f^2 \in \mathbb{R}_f$  и  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^{(1)} + \mathcal{C}^{(2)}$  значение  $|\sin \varphi(\mathbf{f})|$ , где  $\varphi(\mathbf{f})$  — угол между  $\mathbf{f}^{(1)}$  и  $\mathbf{f}^{(2)}$  в разложении  $\mathbf{f} = S_{\mathcal{R}_f^2}^{(1)} \mathbf{f} + S_{\mathcal{R}_f^2}^{(2)} \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{f}^{(2)}$ .

### 5.3 Морфологическая идентификация.

Пусть  $\mathcal{L}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , абсолютные формы изображений некоторых символов, например, различных цифр. Если  $n = 3$ , то все относительные формы изображений этих символов представлены в (25). Например, проекция  $S^{(1,2,3)} \mathbf{f}(\cdot)$  предъявленного изображения  $\mathbf{f}(\cdot)$  символа характеризует в  $\mathbf{f}(\cdot)$  общие элементы в начертании всех трех символов, проекция  $S^{(1)} \mathbf{f}(\cdot)$  характеризует в  $\mathbf{f}(\cdot)$  элементы, присущие начертанию только первого символа, и т. п. С другой стороны, поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(3)} = \mathcal{L} &= (\mathcal{L}_0^{(1,2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3,1)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1)}) \oplus (\mathcal{L}_0^{(2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2,3)}) = \\ &= \mathcal{L}^{(1)} \oplus (\mathcal{L}_0^{(2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2,3)}), \quad (34) \end{aligned}$$



то  $(S^{(1,2,3)} + S^{(1,2)} + S^{(3,1)} + S^{(1)})\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}(\cdot) - (S^{(2)} + S^{(3)} + S^{(2,3)})\mathbf{f}(\cdot)$  есть (косая) проекция изображения символа  $\mathbf{f}(\cdot)$  на абсолютную форму  $\mathcal{L}^{(1)}$  вдоль  $(\mathcal{L}_0^{(2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2,3)})$ , не «очищенная» от элементов начертания, общих с начертаниями второго и третьего символов, а

$$(S^{(1,2)} + S^{(3,1)} + S^{(1)})\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}(\cdot) - (S^{(2)} + S^{(3)} + S^{(2,3)} + S^{(1,2,3)})\mathbf{f}(\cdot)$$

— проекция  $\mathbf{f}(\cdot)$  на  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}$  вдоль  $\mathcal{L}_0^{(2)} \oplus \mathcal{L}_0^{(3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(2,3)} \oplus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}$ , т. е. — проекция на  $\mathcal{L}^{(1)} \ominus \mathcal{L}_0^{(1,2,3)}$ , «очищенная» от элементов начертания, общих для трех символов, и т. п. Следовательно, если  $\mathbf{f}(\cdot)$  — изображение 1-го символа, т. е. если  $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathcal{L}^{(1)}$ , то согласно (34)  $(S^{(1,2,3)} + S^{(1,2)} + S^{(3,1)} + S^{(1)})\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{f}(\cdot) \Leftrightarrow (S^{(2)} + S^{(3)} + S^{(2,3)})\mathbf{f}(\cdot) = 0$ . Поэтому если  $Q_1 = S^{(2)} + S^{(3)} + S^{(2,3)}$ ,  $Q_2 = S^{(3)} + S^{(1)} + S^{(3,1)}$ ,  $Q_3 = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(1,2)}$ , то  $\mathbf{f}(\cdot)$  следует считать изображением  $i$ -го символа, если  $\operatorname{argmin}_{\alpha} \|Q_{\alpha}\mathbf{f}\| = i$ , или —  $\operatorname{argmin}_{\alpha} \|(Q_{\alpha} - S^{(1,2,3)})\mathbf{f}\| = i$ , если в  $\mathbf{f}(\cdot)$  не учитывать составляющую, характерную для всех 3-х символов.

Автор признателен Ю. Нагорному и О. Фаломкиной, принимавшим деятельное участие в подготовке компьютерного варианта рукописи и в обсуждении представленных в ней результатов.

## Список литературы

- [1] *Пытьев Ю. П.* Морфологические понятия в задачах анализа изображений // ДАН СССР. — 1975. — Т. 224. № 6. — С. 1283–1286.
- [2] *Пытьев Ю. П.* Морфологический анализ изображений // ДАН СССР. — 1983. — Т. 269. № 5. — С. 1061–1064.
- [3] *Пытьев Ю. П.* Задачи морфологического анализа изображений // В сб. «Математические методы исследования природных ресурсов Земли из космоса». — М.: Наука, 1984.
- [4] *Pyt'ev Yu. P.* Morphological Image Analysis // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1993. — V. 3, No 1. — P. 19–28.
- [5] *Pyt'ev Yu. P.* The Morphology of Color (Multispectral) Images // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1997. — V. 7, No 4. — P. 467–473.
- [6] *Pyt'ev Yu. P.* Methods of Morphological Analysis of Color Images // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1998. — V. 8, No 4. — P. 517–531.
- [7] *Pyt'ev Yu. P., Kalinin A. V., Loginov E. O., Smolovik V. V.* On the Problem of Object Detection by Black-and-White and Color Morphologies // Pattern Recognition and Image Analysis. — 1998. — V. 8, No 4. — P. 532–536.

- [8] *Yu. P. Pyt'ev and G. S. Zhivotnikov* On the Methods of Possibility Theory for Morphological Image Analysis. // Pattern Recognition and Image Analysis, vol. 14, № 1, 2004, pp. 60–71.
- [9] *Zhivotnikov G. S., Pyt'ev Yu. P., Falomkin I. I.* On the Filtering Algorithm for Images // Pattern Recognition and Image Analysis. — 2005. — V. 3, No. 1. — P. 19–28.
- [10] *Ю. П. Пытьев, А. И. Чуличков* Методы морфологического анализа изображений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
- [11] *Н. И. Ахизер и Н. Н. Глазман* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966.
- [12] *Ф. Р. Гантмахер* Теория матриц. — М.: Гостехиздат, 1954.
- [13] *Yakimovsky A. Y.* Boundary and object detection in real world images // Journal of the Association of Computing Machinery. 1976. № 23. P. 599–618.
- [14] *Serra J.* Image analysis and Mathematical Morphology. Academic Press. London 1982.
- [15] *Ayache N. and Faugeras O. D. Hyper.* A new approach for the recognition and positioning of two-dimensional objects // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1986 № 8(1). P. 44–54.
- [16] *Davies E. R.* Locating objects from their point features using an optimized Hough-like accumulation technique // Pattern recognition, — 1992 d. № 13(2). P. 113–121.
- [17] *Вутмих В. А., Сергеев В. В., Соуффер В. А.* Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. — М.: Наука, 1982.
- [18] *Visilter Yu., Zheltov S., Stepanov A.* Object Detection and Recognition using Events-based Image Analysis // SPIE Processings. — 1996. V. 2823. P. 184–195.
- [19] *Форсайт А., Понс Дж.* Компьютерное зрение. Современный подход. — Вильямс 2004.
- [20] *Dougherty E. R.* The dual representation of gray-scale morphological filters. IEEE Trans. PA MI, 1989.
- [21] *Visilter Yu. V.* Design of Morphological Operators Based on Selective Morphology // SPIE Proceedings. Vol. 4667, Sun Jose, 2002. P. 215–226.
- [22] *Визильтер Ю. В., Желтов С. Ю.* Сравнение и локализация фрагментов изображений с использованием проективных морфологий // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2008. № 2. С. 14–22.

- [23] *Визильтер Ю. В., Желтов С. Ю.* Проективные морфологии и их применение в структурном анализе цифровых изображений // Изв. РАН Теория и системы управления. 2008. № 6, С. 113–128.
- [24] *Визильтер Ю. В., Желтов С. Ю.* Использование проективных морфологий в задачах обнаружения и идентификации объектов на изображениях // Теория и системы управления. 2009 № 2 С. 125–138.
- [25] *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. М.: ФИЗМАТЛИТ, второе издание, 2013.
- [26] *Визильтер Ю. В.* Структурная фильтрация цифровых изображений с использованием проективных морфологий // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2008. № 5 С. 18–22.
- [27] *Визильтер Ю. В.* Обобщенная проективная морфология // Компьютерная оптика. Т. 32. № 4. 2008.
- [28] *Куличков С. Н., Чуличков А. И., Демин Д. А.* Морфологический анализ инфразвуковых сигналов в акустике. М.: изд-во Новый Акрополь, 2010, 132 с.
- [29] *Цыбульская Н. Д., Чуличков А. И.* Эмпирическое построение формы изображения как инварианта его преобразований, сохраняющих упорядочение яркостей пикселей. ЖВМ и МФ, 2012, т. 52, № 9, с. 1735–1744.
- [30] *Ю. В. Визильтер, С. Ю. Желтов, А. В. Бондаренко, Н. В. Хосков, А. В. Моржин* Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения. Курс лекций и практических занятий. М.: Физматкнига, 2010.
- [31] *Пытьев Ю. П., Зубюк А. В.* Случайная и нечеткая морфологии (эмпирическое восстановление модели, идентификация) // Материалы IX Межд. Конф. «Интелл. Сист. и Компьют. Науки», — М.: Изд. Мех.-матем. ф-та МГУ, 2006. — Т. 1, Ч. 2, с. 222–225.
- [32] *Зубюк А. В.* Случайная морфология: алгоритмы обучения и классификации // Матем. методы распозн. образов (ММРО-15) Доклады 15-ой Всеросс. Конф. М.: 2011, с. 436–439.